Theoretische Physik I

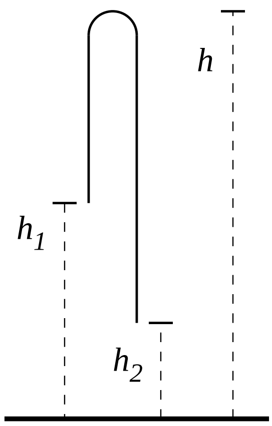
Hausübung, Blatt 2 **WS 03/04 Abgabetermin: Di. 28.10.03**

[H4] Peitschenknall[1] **(2+2 Punkte)**

Ein Seil der Länge ℓ wird senkrecht in die Luft geworfen Die Masse pro Längeneinheit $\rho = m/\ell$ sei konstant und der Luftwiderstand vernachlässigbar.

(a) Verwenden Sie die Größen h_1 und h_2 als Koordinaten, bestimmen Sie die Lagrangefunktion und stellen Sie die Bewegungsgleichungen auf (Vernachlässigen Sie das Teilstück des Knicks).

(b) Substituieren Sie $h_1 - h_2 \equiv x$ und stellen Sie damit die Bewegungsgleichung für das Wandern der Knickstelle auf (*Hinweis*: Entkoppeln Sie die Differentialgleichungen durch Addieren und Subtrahieren der Gleichungen). Zeigen Sie, daß $\dot{x}$ gegen unendlich geht, wenn der Knick das Seilende erreicht (Peitschenknall durch Überschallgeschwindigkeit).

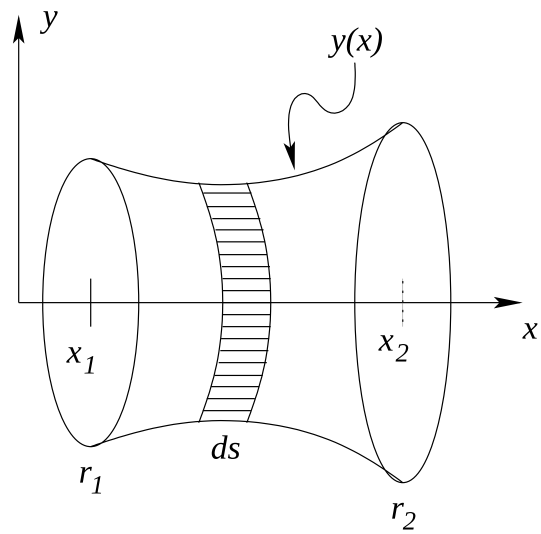


[H5] Minimalfläche, Seifenblase **(1+2 Punkte)**

Es soll die Fläche einer Seifenhaut bestimmt werden, die zwischen zwei *festen* kreisförmigen Drähten eingespannt ist (Skizze). Die Oberflächenspannung der Seifenhaut ist proportional zum Flächeninhalt und versucht daher den Flächeninhalt zu minimieren.

(a) Formulieren Sie die Aufgabe als Variationsproblem (Wirkung, Lagrange-Gleichungen und Randbedingungen). Vernachlässigen Sie dazu die Schwerkraft und gehen Sie von einer Rotationsfläche aus, welche durch eine Funktion $y(x)$ beschrieben wird. Der Flächeninhalt eines schmalen Streifens ds mit der Lage x beträgt

$$\begin{aligned} dA &= 2\pi y ds = 2\pi y\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \\ &= 2\pi y\sqrt{1 + y'^2}dx \quad , \quad \text{mit} \quad y' = \frac{dy}{dx}. \end{aligned}$$



(b) Interpretieren Sie die Koordinate x in (a) als Zeit. Verwenden Sie den zugehörigen "Energieerhaltungssatz" um die Bewegungsgleichungen zu vereinfachen (*Hinweis*: Multiplizieren Sie die Lagrange-Gleichung mit y'). Lösen Sie die Bewegungsgleichung und bestimmen Sie somit die Funktion $y(x)$, welche die rotationssymmetrische Minimalfläche beschreibt. Verzichten Sie darauf die Integrationskonstanten durch die Randwerte r_1, r_2 auszudrücken.

[1] Der aus Ungarn stammende Physiker István Szabó trat gern mit einer reich verzierten ungarischen Hirtenpeitsche vor seine erstaunten Studenten und ließ die Peitsche "zur Überprüfung der Lagrangeschen Bewegungsgleichungen" kunstvoll knallen. (Quelle: Die Zeit).

[H6] Extremale Wirkung: Minimal? (2+1 Punkte)

Gegeben sei die Wirkung eines eindimensionalen harmonischen Oszillators:

$$S[x] = m \int_0^{t_2} dt \; (\tfrac{1}{2}\dot{x}^2 - \tfrac{1}{2}\omega^2 x^2). \tag{1}$$

(a) Bestimmen Sie die Lösung $x(t) = \hat{x}(t)$ der zugehörigen Bewegungsgleichung mit der Anfangsbedingung $\hat{x}(0) = 0$ und der Amplitude $\hat{x}_{\max} = a$. Untersuchen Sie Variationen dieser Lösung indem Sie die Wirkung (1) für benachbarte Pfade

$$x(t) = \hat{x}(t) + \epsilon\eta(t) \quad \text{mit} \quad \eta(0) = \eta(t_2) = 0, \tag{2}$$

bis einschließlich zur Ordnung $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ berechnen. Zeigen Sie, daß für $t_2 > \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega}$ die Wirkung für die Lösung $\hat{x}(t)$ nicht länger ein Minimum ist. Bestimmen Sie dazu das Vorzeichen der "zweiten Variation" der Wirkung,

$$\delta^2 S[\hat{x}, \eta] = \left(\frac{\partial^2}{\partial \epsilon^2} S[\hat{x} + \epsilon\eta] \right) \Big|_{\epsilon=0} = \int_0^{t_2} dt \int_0^{t_2} dt' \; \eta(t) \frac{\delta^2 S}{\delta x(t) \delta x(t')} [\hat{x}] \; \eta(t'),$$

in Abhängigkeit von der Störung η.

Hinweise: (*i*) Integrieren Sie partiell und verwenden Sie die Randbedingungen (2). (*ii*) Verwenden Sie die Bewegungsgleichung. (*iii*) Entwickeln Sie die Störung η aus (2) in eine Fourier-Reihe:

$$\eta(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(\frac{k\pi t}{t_2}). \tag{4}$$

(b) *Konjugierter Punkt*: Für den Fall der nicht-minimalen Wirkung ($t_2 > \frac{T}{2}$) bestimmen Sie ein k_0, sodaß die Summe in (4) in zwei Teile zerfällt, wobei für $k > k_0$ ($k \leq k_0$) die Änderung $\delta^2 S > 0$ ($\delta^2 S < 0$) ist. Die Situation $t_2 > \frac{T}{2}$ stellt also einen "Sattelpunkt" im Funktionenraum dar. Was passiert wenn man t_2 (von unten) gegen $\frac{T}{2}$ gehen läßt? Wie viele Lösungen $\hat{x}(t)$ gibt es zu einem statt $\hat{x}_{\max}$ vorgegebenen Endwert $\hat{x}_2 = \hat{x}(t_2)$, für $t_2 < \frac{T}{2}$ und für $t_2 = \frac{T}{2}$?