Theoretische Physik I

Hausübung, Blatt 4 **WS 03/04 Abgabetermin: 11.11.03**

[H10] Gestörtes Kepler Problem **(3 Punkte)**

Zeigen Sie, daß sich die Bahngleichung eines Teilchens der Masse m im Potential

$$V(r) = -\frac{k}{r} + \frac{c}{2r^2}$$

auf die Form

$$r(\varphi) = \frac{d(1-e^2)}{1 + e\cos(\alpha\varphi)}$$

mit $e = \ldots$, $\alpha = \ldots$ und $d = \ldots$ bringen läßt. Für $\alpha = 1$ ist die Bahn eine Ellipse, hingegen für $\alpha \neq 1$ eine präzessierende Ellipse. Die Präzession kann durch die Geschwindigkeit der Periheldrehung charakterisiert werden. Bestimmen Sie näherungsweise die Perihelverschiebung pro Umlauf, wenn α nahezu 1 ist. Drücken Sie das Ergebnis durch die dimensionslosen Größen $\eta = \frac{c}{kd}$ und e aus.

[H11] Skalierungsinvarianz **(1+1+1+1 Punkte)**

In der Präsenzübung **[P7]** wurde für das Zentralpotential $V(r) \sim r^k$ die Skalierung

$$x^i \to \lambda x^i \quad \text{und} \quad t \to \lambda^{1-k/2}\, t$$

betrachtet, unter der $L \to \lambda^k\, L$ und somit $S = \int dt\ L \to \lambda^{1+k/2} S$.
Für $V(r) = -ar^{-2}$ (es sei $a > 0$), also $k = -2$, ist demnach die Wirkung S invariant unter der Transformation $(\vec{r}, t) \to (\lambda\vec{r}, \lambda^2 t)$, d.h. S ist konstant auf der Kurvenschar ($\lambda := 1{+}\alpha$)

$$\vec{r}_\alpha(t) \;=\; (1{+}\alpha)\ \vec{r}((1{+}\alpha)^{-2}t) \;=\; \vec{r}(t) + \alpha\vec{r}(t) - 2\ \alpha\ t\ \dot{\vec{r}}(t) + O(\alpha^2).$$

(a) Bestimmen Sie mit Hilfe des Noether-Theorems die zugehörige erhaltene Ladung Q und überzeugen Sie sich davon, daß $\dot{Q} = 0$.
Hinweis: $\frac{d}{d\alpha} L(\vec{r}_\alpha, \dot{\vec{r}}_\alpha)\big|_{\alpha=0} = \frac{d}{dt} K \neq 0$.
(b) Benutzen Sie Energie- und Drehimpulserhaltung, um Q allein durch $\vec{r}$ und t (kein $\dot{\vec{r}}$) auszudrücken und ermitteln Sie daraus (ohne Integration) $r(t)$.
(c) Lösen Sie mit diesem $r(t)$ das Integral für $\varphi - \varphi_0$, um $\varphi(t)$ zu erhalten.
Hinweis: Nützen Sie die Freiheit in der Wahl des Anfangszeitpunktes t_0, um die lineare Zeitabhängigkeit in $r(t)$ zu eliminieren.
(d) Eliminieren Sie nun den Zeitparameter und finden Sie die Bahnkurve $r(\varphi)$.

Bemerkung: Die Ergebnisse wurden auf herkömmlichem Weg in der Präsenzübung **[P9]** ausgerechnet.

[H12] Trägheitsmomente **(1+2 Punkte)**

(a) Welches sind die Hauptachsen und Hauptträgheitsmomente um das Massenzentrum (= Schwerpunkt) einer dünnen Platte (infinitesimale Ausdehnung in z-Richtung), die die Gestalt eines gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks hat?

(b) Drei gleiche Massenpunkte an den Raumpunkten $\vec{r}_1 = a(1,0,0)$, $\vec{r}_2 = a(0,1,2)$ und $\vec{r}_3 = a(0,2,1)$ seien mit masselosen Drähten starr verbunden. Berechnen Sie die Hauptachsen und Hauptträgheitsmomente dieses Systems bezüglich des Koordinatenursprungs.