

[P1] Polarkoordinaten

(x, y) seien kartesische Koordinaten eines 2-dimensionalen Vektorraums. Polarkoordinaten (r, φ) sind gegeben durch

$$x = r \cos \varphi \quad , \quad y = r \sin \varphi .$$

(a) Bestimmen Sie die Einheitsvektoren $\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi$ im kartesischen Koordinatensystem. Veranschaulichen Sie sich die Koordinatenlinien. Geben sie die Komponenten des Ortsvektors \vec{r} in der $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi\}$ -Basis an.

(b) Beschreiben Sie die freie Bewegung eines Partikelchens der Masse m in Polarkoordinaten. Bestimmen Sie dazu die Newtonschen Bewegungsgleichungen sowie die Lagrange-Gleichungen in diesen Koordinaten. Zeigen Sie, daß die beiden Beschreibungen äquivalent sind.

[P2] Potentialfelder

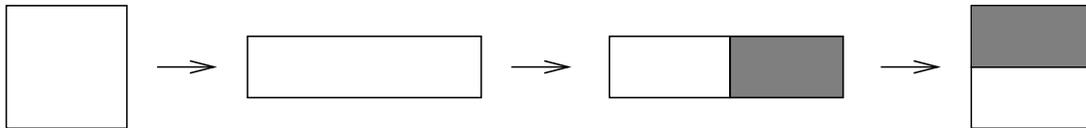
Welches der folgenden Kraftfelder besitzt ein Potential? Berechnen Sie ein Potential, falls es existiert.

(a) $\vec{F} = x\vec{e}_y - y\vec{e}_x$

(b) $\vec{F} = -(y + z)\vec{e}_x - (x + z)\vec{e}_y - (x + y)\vec{e}_z$

[P3] Bäcker-Abbildung, chaotische Bewegung

Betrachten Sie die folgende Sequenz von Abbildungen, die das Auswalzen, Schneiden und Schichten der Blätterteigproduktion mathematisch modelliert:



Wie lauten die entsprechenden Abbildungsvorschriften für die Koordinaten $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$ eines Massenpunktes.

Formulieren Sie die Gesamtabbildung in einer binären Darstellung der Koordinaten

$$x = 0, a_1 \dots a_n \dots \quad \text{und} \quad y = 0, b_1 \dots b_n \dots \quad \text{mit} \quad a_i, b_i \in \{0, 1\}. \quad (2)$$

Unterscheiden Sie hierbei die Fälle $a_1 = 0$ und $a_1 = 1$.

Iterieren Sie die Abbildungsvorschrift bei endlicher Präzision der Startkoordinaten. Was passiert bei großer Wiederholungszahl?