Theoretische Physik I

Präsenzübung, Blatt 3 **WS 03/04 28/29.10.03**

[P6] Schwarzes Loch

Das Außenraum-Gravitationsfeld eines sphärisch-symmetrischen Sterns wird in der Allgemeinen Relativitätstheorie durch die sogenannte Schwarzschild-Geometrie beschrieben. Testteilchen, also punktförmige Körper, deren Einfluß auf das Gravitationsfeld vernachlässigt werden kann, verspüren in dieser Geometrie das effektive Potential

$$V_{\text{eff}}(r) = -\epsilon \frac{\gamma M}{r} + \frac{L^2}{2r^2} - \frac{\gamma M L^2}{r^3}.$$

Hierbei wurden Einheiten gewählt, so daß für die Lichtgeschwindigkeit $c = 1$ gilt. Die Masse des Sterns ist M, und L ist der Drehimpuls des Testteilchens, γ ist die Newtonsche Gravitationskonstante. Die Konstante ϵ hat den Wert 1 für massive Teilchen mit Einheitsmasse $m = 1$ und ist Null für masselose Teilchen (Photonen). Im Newtonschen Fall fehlt lediglich der dritte Term ($\sim \frac{1}{r^3}$).

Diskutieren Sie qualitativ die unterschiedlichen Orbits für massive Teilchen im Newtonschen wie im relativistischen Fall sowie für masselose Teilchen im relativistischen Fall. Bestimmen Sie die Radien $r(L^2)$ kreisförmiger Orbits und klassifizieren Sie diese Bahnen als stabil bzw. instabil. Nähern Sie für den massiven relativistischen Fall die Radien für große Drehimpulse L und vergleichen sie das Ergebnis mit dem masselosen Fall. Was ist der minimale Radius und Drehimpuls für die Existenz einer stabilen Kreisbahn im massiven relativistischen Fall?
Hinweis: Auf einer kreisförmigen Bahn gilt $\frac{\partial V_{\text{eff}}}{\partial r} = 0$.
Bemerkung: $V_{\text{eff}}(r)$ wird in der Hausübung [H8] mit $r_0 = 2\gamma M/c^2$ abgeleitet.

[P7] 3. Keplersches Gesetz

Betrachten Sie die Bewegung in einem Zentralpotential der Form

$$V(\vec{r}) \sim |\vec{r}|^k \quad , \quad k \text{ reell.} \tag{2}$$

Finden Sie eine Reskalierung der Koordinaten $x^i \to \alpha x^i$ sowie der Zeit $t \to \beta t$, unter der sich die Lagrange-Funktion nur um einen Faktor ändert. Die Lagrange-Gleichungen sind invariant unter einer solchen Transformation (warum ?). Somit ist für eine gegebene Lösung $x^i(t)$ die transformierte Trajektorie $\tilde{x}^i(\tilde{t}) = \alpha x^i(\beta t)$ ebenfalls eine Lösung, jedoch zu anderen Randbedingungen. Nützen sie diesen Sachverhalt, um für den Keplerschen Fall, $k = -1$, das 3. Keplersche Gesetz abzuleiten. Wie hängt für den harmonischen Oszillator, $k = 2$, die Schwingungsperiode von der Amplitude ab?

Vorlesung: O. Lechtenfeld - Übungen: R. Wimmer