

[P8] Kraftgesetz für Kreisbahn

Eine Masse m bewegt sich in einem Zentralfeld auf einer Kreisbahn mit Radius R durch das Kraftzentrum. Finden Sie das zugehörige Kraftgesetz $\vec{F}(r)$.

Hinweise: Parametrisieren Sie zunächst die Bahn in einer Ebene als $r(\varphi)$ und drücken Sie $(\frac{dr}{d\varphi})^2$ durch $r(\varphi)$ aus. Gehen sie von einer konservativen Kraft aus und bestimmen Sie das Potential mit Hilfe von Energie- und Drehimpulserhaltung. Verwenden Sie:

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \dot{\varphi} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{\ell}{mr^2} \quad .$$

[P9] Zwei Teilchen mit attraktivem Potential

Zwei Teilchen wechselwirken über das attraktive Potential

$$V(r) = -\frac{gm}{2} \frac{1}{r^2} \quad ,$$

wobei r der Relativabstand, m die reduzierte Masse und g eine Kopplungskonstante ist.

- (a) Wann sind Lösungen für $E < 0$ möglich?
- (b) Bestimmen Sie für $E < 0$ den äußeren Umkehrpunkt r_{\max} .
- (c) Für $t = t_0$ betrage der Relativabstand r_{\max} . Wie entwickelt sich der Abstand mit der Zeit? Wie sieht die Bahnkurve $r(\varphi)$ aus?
- (d) Wie oft umrunden sich die Teilchen?
- (e) Treffen sie sich in endlicher Zeit?

Hinweise:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{a} \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x}$$

$$\ln(y + \sqrt{y^2 - 1}) = \operatorname{arcosh} y$$