[P18] Additionstheorem für parallele Geschwindigkeiten, Rapidität

(a) Betrachten Sie in einem zweidimensionalen Koordinatensystem (x, y) eine Gerade g_1 durch den Ursprung. Die Steigung dieser Geraden sei gegeben durch m_1. Benutzen Sie nun diese Gerade als neue x-Achse eines Koordinatensystems (x', y'). In diesem Koordinatensystem sei wiederum eine Gerade g_2 durch den Ursprung gegeben, festgelegt durch deren Steigung m_2' bezüglich des Koordinatensystems (x', y'). Geben Sie die Steigung m_2 der Geraden g_2 bezüglich des Koordinatensystems (x, y) an.
Hinweis: Drücken Sie $\tan(\alpha + \beta)$ durch $\tan \alpha = m_1$ und $\tan \beta = m_2$ aus.

(b) Ein System S' bewege sich gegen ein System S mit der Geschwindigkeit v. Ein System S'' bewege sich gegen das System S' mit der Geschwindigkeit v'. Mit welcher Geschwindigkeit bewegt sich das System S'' gegen das System S? Finden Sie das Additionstheorem für *parallele* Geschwindigkeiten

$$v'' = \frac{v + v'}{1 + \frac{vv'}{c^2}} \quad ,$$

indem Sie zwei parallele Lorentztransformationen mit den Geschwindigkeiten v und v' hintereinander ausführen. Vergleichen Sie das Ergebnis mit demjenigen aus Punkt (a). Betrachten sie nun anstelle der Geschwindigkeiten die *Rapiditäten* θ,

$$\tanh \theta = \frac{v}{c} \quad . \tag{2}$$

Welche Rapidität θ'' erhält erhält man für das System S'' bezüglich des Systems S? Was ist die analoge Operation in Punkt (a)? Erwarten Sie eine einfache Formel für die Addition nichtparalleler Geschwindigkeiten?

[P19] „Zwillingsparadoxon“

Diskutieren sie das sogenannte „Zwillingsparadoxon“.
(a) Verwenden Sie einen Schiedsrichter!
(b) Berechnen Sie die Reisezeit mit dem κ-Kalkül (c=1): $T_E = \kappa \cdot T_S$ und $\kappa^2 = \frac{1+v}{1-v}$.