

## 9. Hausübung zur Analytischen Mechanik und Speziellen Relativität, WS 2016/17

(abzugeben am Dienstag, 10.01.2017)

### Computer-Bonusaufgabe *Hamiltonscher Fluss*

Diese Aufgabe kann **alternativ** zur Hausübung H21 mit dem Computer bearbeitet werden um **Computerübungspunkte** zu verdienen.

#### Aufgabe H21c *Mexican Hat* (2+2+1 Punkte)

Wir betrachten ein Teilchen der Masse  $m = 1$  im Potential

$$V(q) = \frac{1}{4}q^4 - q^2.$$

(a) Geben Sie die Hamiltonfunktion  $H$  an und plotten Sie den vom Hamiltonschen Vektorfeld

$$(q, p) \mapsto \left( \frac{\partial H}{\partial p}, -\frac{\partial H}{\partial q} \right)$$

generierten Hamiltonschen Fluss als **StreamPlot**. Tragen Sie in den Plot auch die Konturen zu den Energien  $E_1 = -0.5$ ,  $E_2 = 0.0$ ,  $E_3 = 0.5$  ein (etwa mit **ContourPlot**). Können sich Phasenraumbahnen schneiden? Aus wievielen Kurven besteht demnach die Separatrix zur Energie  $E_2$ ?

(b) Propagieren Sie die Teilmenge

$$\mathcal{S} = \{(q, p) \mid q^2 + p^2 < 1\}$$

von der Zeit  $t_0 = 0$  bis  $t_1 = 10$  entlang der Flusslinien des Vektorfeldes. Stellen Sie das Resultat bei  $t_1$  graphisch dar. Überprüfen Sie, dass das Phasenraumvolumen erhalten bleibt.

(c) Stellen Sie den Phasenraumfluss aus Teil (b) als Animation dar.

*Hinweis:* Für Aufgabenteile (b) und (c) erstellen Sie zunächst zwei Arrays

```
p0 = Table[N[Min + (Max - Min) / Bins i], {i, 1, Bins}, {j, 1, Bins}];  
q0 = Table[N[Min + (Max - Min) / Bins j], {i, 1, Bins}, {j, 1, Bins}];
```

die für jeden Bildpunkt  $(i, j)$  der graphischen Darstellung Werte für  $q$  und  $p$  enthalten. Die Teilmenge  $\mathcal{S}$  aus (b) wird dann beschrieben durch

$$\text{HeavisideTheta}[1 - (q0^2 + p0^2)]$$

und kann mit **Matrixplot** geplottet werden. Um das Bild der Menge bei  $t_1$  zu erhalten, müssen wir für jeden Bildpunkt  $(q, p)$  bei  $t_1$  entscheiden, ob sein Urbild unter der Propagation von  $t_0$  bis  $t_1$  zur Menge  $\mathcal{S}$  gehört. Lösen Sie daher ausgehend von den Arrays **q0** und **p0** die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen *Rückwärts* in der Zeit. Hierfür können Sie **NDSolve** mit den Parametern

```
Method -> {"FixedStep", Method -> "ExplicitMidpoint"}
```

und

```
StartingStepSize -> .05
```

benutzen. Zur Bestimmung des Phasenraumvolumens zählen Sie einfach die Anzahl der Bildpunkte. Als Parameter können Sie etwa  $\text{min} = -2.5$ ,  $\text{max} = 2.5$ ,  $\text{bins} = 256$  verwenden.

### Allgemeine Hinweise

Abzugeben ist ein Ausdruck des ausgeführten *Mathematica* Notebooks mit Ergebnissen. Zusätzlich ist das Notebook (.nb) als eMail an nicolas.eicke@itp.uni-hannover.de zu senden. Der Dateiname sollte aus Ihrem Vor- und Nachnamen bestehen. Sie können nach Rücksprache auch andere Plattformen als *Mathematica* benutzen.