12. Hausübung zur Analytischen Mechanik und Speziellen Relativität, WS 2016/17

(abzugeben am Freitag, 03.02.2017)

Computerübung 3 *Lineare zeitinvariante Systeme und Fouriertransformation*

Ein lineares zeitinvariantes System (engl. LTI-system) ist eine Abbildung

$$\xrightarrow{f(t)} \boxed{\quad L \quad} \xrightarrow{g(t)}$$

die eine Inputfunktion $f(t)$ linear auf eine Outputfunktion $g(t) = L[f](t)$ abbildet, d.h. für zwei Funktionen $f_{1,2}$ und $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$ gilt

$$L[\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2](t) = \lambda_1 L[f_1](t) + \lambda_2 L[f_2](t).$$

Zeitinvariant bedeutet, dass eine Zeitverschiebung in f auch nur eine Zeitverschiebung in g zur Folge hat. Schreibt man

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t')\,\delta(t-t')\,\mathrm{d}t'$$

und benutzt die Linearität von L, erhält man

$$g(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t')\,L[\delta](t-t')\,\mathrm{d}t' = \int_{\mathbb{R}} f(t')\,G(t-t')\,\mathrm{d}t' = (f * G)(t), \tag{1}$$

wobei $G(t) = L[\delta](t)$ die sog. *Impulsantwort* des Systems ist. Sie ist gerade der Output den man bekommt, wenn man die δ-Funktion als Input wählt. Kennt man also die Funktion G, so kann man durch Faltung den Output g für jeden beliebigen Input f bestimmen (falls L ein linearer Differentialoperator ist, ist G nichts anderes als die Greensfunktion zu L).

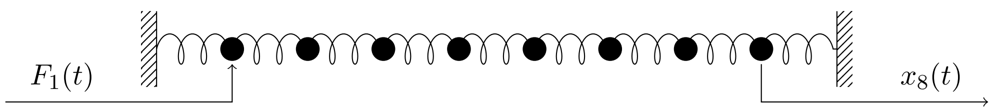
Durch Fouriertransformation der Faltungsrelation (1) ergibt sich

$$\widetilde{g}(\omega) = \widetilde{f}(\omega) \cdot \widetilde{G}(\omega),$$

d.h. die Fouriertransformierte der Impulsantwort gibt das (komplexe) Verhältnis der Amplituden von Output zu Input bei einer gegebenen Frequenz ω. Sie wird *Frequenzgang* genannt.

Aufgabe H27 *Transferkette* (2+3+3+2 Punkte + 2 Bonuspunkte)

Wir betrachten eine Kette aus 8 Punkten (Masse jeweils $m = 1$), die mit Federn (Federkonstante $k = 1$) miteinander und mit einem festen Rand verbunden sind.



Wir beschreiben das System durch einen Vektor $\vec{x}(t)$, der die Abweichung eines jeden Punktes von seiner Ruhelage angibt. Auf den ersten Punkt wirkt zusätzlich die Kraft $f(t) = F_1(t)$, die den Input unseres Systems in obigem Sinne darstellt. Am anderen Ende lesen wir als Output die Position $g(t) = x_8(t)$ des letzten Punktes aus. Auf das gesamte System wirkt eine Reibungskraft $\vec{F}_R(\dot{\vec{x}}) = -0.05\,\dot{\vec{x}}$. Am Anfang ist das System in Ruhe.

(a) Formulieren Sie die Bewegungsgleichungen in der Form

$$\ddot{\vec{x}}(t) + 0.05\,\dot{\vec{x}}(t) = f(t)\,\vec{e}_1 + A\,\vec{x}(t)$$

und geben Sie die Kopplungsmatrix A an.

(b) Berechnen und plotten Sie die Impulsantwort $G(t)$ des Systems im Intervall $t \in [0, 500]$.

Hinweis: Die Bewegungsgleichungen mit einer Funktion $f(t) = \delta(t)$ direkt numerisch zu lösen ist problematisch. Benutzen Sie stattdessen die Tatsache, dass ein $\delta-$Input einen kinetischen Impuls $\int F_1(t)\,\mathrm{d}t = \int \delta(t)\,\mathrm{d}t = 1$ instantan an das erste Kettenglied transferiert und lösen Sie die Bewegungsgleichungen in Abwesenheit einer äußeren Kraft ($f \equiv 0$) mit den veränderten Anfangsbedingungen

$$\vec{x}(0) = \{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}$$
$$\dot{\vec{x}}(0) = \{1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}.$$

Verwenden Sie hierzu **NDSolve**.

(c) Berechnen Sie den Frequenzgang $\widetilde{G}(\omega)$ durch Fouriertransformation der Impulsantwort aus Aufgabenteil (b) und plotten Sie den Betrag $|\widetilde{G}(\omega)|$.

Hinweis: Durch Diskretisierung der Zeit in N Schritte gemäß

$$t_n = \Delta t \cdot n, \quad \omega_m = \omega_0 + \Delta\omega \cdot m$$

erhalten wir für die Fouriertransformation

$$\widetilde{G}(\omega_m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega_m t}\, G(t)\,\mathrm{d}t \approx \frac{\Delta t}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-imn\Delta t\Delta\omega}\, e^{-in\omega_0\Delta t}\, G(t_n).$$

Setzen wir nun $\Delta t\Delta\omega = 2\pi/N$ und $\omega_0 = -\pi/\Delta t$, so erhalten wir

$$\widetilde{G}(\omega_m) = \frac{\Delta t}{\sqrt{2\pi/N}} \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-i2\pi mn/N}\, (-1)^n G(t_n) \right).$$

Der Term in der Klammer ist genau die *Diskrete Fouriertransformierte* der Liste $(-1)^n G(t_n)$ (bzw. die Inverse davon). Sie ist in *Mathematica* handlich als **InverseFourier** implementiert. Die Umkehrung ist

$$(-1)^n G(t_n) = \frac{\Delta\omega}{\sqrt{2\pi/N}} \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=0}^{N-1} e^{i2\pi mn/N}\, \widetilde{G}(\omega_m) \right).$$

Hier kann der Term in der Klammer entsprechend mit **Fourier** abgerufen werden. Verwenden Sie $N = 1000$, $\Delta t = 0.5$ und berechnen Sie $\Delta\omega$ und ω_0 entsprechend.

(d) Bestimmen Sie die Positionen der Peaks von $|\widetilde{G}|$ und vergleichen Sie sie mit den Eigenwerten der Matrix A. Wie hängen die beiden zusammen?

(e) Nutzen Sie die Faltungsrelation (1) (in der Zeit- oder Frequenzform) um die Outputfunktion $g(t)$ für den Input

$$f(t) = \exp\left(-\frac{(t-100)^2}{100} \right) \cos(t)$$

zu bestimmen. Lösen Sie die Differentialgleichung auch einmal direkt mit **NDSolve** und vergewissern Sie sich, dass die beiden Lösungen übereinstimmen.

Allgemeine Hinweise

Abzugeben ist ein ein Ausdruck des ausgeführten *Mathematica* Notebooks mit Ergebnissen. Zusätzlich ist das Notebook (.nb) als eMail an nicolas.eicke@itp.uni-hannover.de zu senden. Der Dateiname sollte aus Ihrem Vor- und Nachnamen bestehen. Sie können nach Rücksprache auch andere Plattformen als *Mathematica* benutzen.