1. Hausübung zur Analytischen Mechanik und Speziellen Relativität, WS 2016/17

(abzugeben am Dienstag, 01.11.2016)

Aufgabe H01 *Relativistische Hexe* (4 Punkte)

Eine Hexe fliegt auf ihrem Besen (Ruhelänge $2L$) mit konstanter Geschwindigkeit v auf eine Scheune der Ruhelänge L zu. Das Vorder- und Hintertor der Scheune sind so miteinander verbunden, dass (im Ruhesystem der Scheune) stets ein Tor offen und das andere Tor geschlossen ist. Die Hexe fliegt nun durch das geöffnete hintere Tor in die Scheune hinein. Ein Beobachter im Ruhesystem der Scheune schließt dieses Tor, sobald das Ende des Besens in der Scheune verschwunden ist. Ist es möglich, dass sowohl die Hexe als auch das vordere Tor bei diesem Flugmanöver unbeschädigt bleiben? Wie schnell muss die Hexe hierfür fliegen? Diskutieren Sie den Ablauf anhand zweier Raumzeit-Diagramme: einmal im Ruhesystem der Scheune und einmal im Ruhesystem der Hexe.

Hinweis:
Zeichnen Sie in den Raumzeit-Diagrammen die Weltlinien der Tore und der Besen-Enden. Wo liegt der Besen zu einem festen Hexen-Zeitpunkt? Wo zeigen Uhren an den Toren die gleiche Zeit an?

Aufgabe H02 *Lorentz-Transformation eines Lichtstrahls* (6 Punkte)

Wir setzen c=1. In der xy-Ebene fällt ein Lichtstrahl unter dem Winkel θ zur positiven x-Achse ein. Seine Frequenz ω und sein Wellenvektor $\vec{k} = \omega\vec{n}$ mit $\vec{n} = (-\cos\theta, -\sin\theta)$ Lorentz-transformieren genauso wie t und $\vec{r}$. Was sieht ein Beobachter, der sich mit Geschwindigkeit v in x-Richtung bewegt? Genauer: Aus welcher Richtung θ' und mit welcher Frequenz ω' nimmt er den Lichtstrahl wahr?

(a) Berechnen Sie die Dopplerverschiebung $\frac{\omega'}{\omega}(\theta)$ und $\frac{\omega'}{\omega}(\theta')$ sowie die Aberration $\theta'(\theta)$, indem Sie eine Transformationsformel für $\tan\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$ ableiten [Penrose 1959].

Hinweis:
Wenden Sie die zuständige Lorentztransformation auf $(\omega, \vec{k})$ an, um $(\omega', \vec{k}') = \omega'(1, -\cos\theta', -\sin\theta')$ zu erhalten, und finden Sie damit $\cos\theta'$ als Funktion von $\cos\theta$ und v.

(b) Plotten Sie für eine gewählte Geschwindigkeit $0.5<v<0.9$ das Frequenzverhältnis $\frac{\omega'}{\omega}$ als Funktion von θ und als Funktion von θ' sowie den verkleinerten Winkel $\theta'(\theta)$, jeweils im Intervall $[0, \pi]$.

(c) Berechnen Sie beide Größen (als Funktion von v) für θ=0 (vorn), $\theta=\frac{\pi}{2}$ (neben) und $\theta=\pi$ (hinten). Identifizieren Sie den k-Faktor in Ihren Resultaten. Welcher Winkel $\overline{\theta}$ bzw. $\overline{\theta}'$ trennt blauverschobenes von rotverschobenem Licht?

(d) Auch die Leuchtstärke der Quelle ändert sich für den bewegten Beobachter, und zwar mit dem Faktor $(\frac{\omega'}{\omega})^2$. Beschreiben Sie, was Kapitän Kirk „sieht", wenn er die USS Enterprise auf 99.99% Lichtgeschwindigkeit (relativ zum galaktischen Zentrum) bringt.