(abzugeben am Dienstag, 10.01.2017)

Aufgabe H18 *Zwei kanonische Systeme* (3 Punkte)

(a) Ein Teilchen (Masse m) bewege sich in einem bezüglich der z-Achse symmetrischen Potential, d.h. $V = V(\rho, z)$ in Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z). Die Hamiltonfunktion H und die Bewegungsgleichungen in Zylinderkoordinaten wurden in P18 (a) aufgestellt. Wie lauten die Hamiltonfunktion H' und die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen in einem Koordinatensystem, das um die z-Achse mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω rotiert?

(b) Gegeben Sei die Hamiltonfunktion $H = \frac{1}{2}\, q^2 p^2$. Lösen Sie die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen.
Hinweis: Benutzen Sie einen Erhaltungssatz.

Aufgabe H19 *Erzeugende Transformation für Galilei-Transformationen* (2 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass $\frac{\partial F}{\partial t}$ eine Erhaltungsgröße ist und dass $\frac{\partial F}{\partial t} = \{H, F\}$ gilt, wenn sowohl die Hamiltonfunktion H als auch F Erhaltungsgrößen sind.

(b) Berechnen Sie die erzeugende Funktion $F(x, p)$ der Transformation $\delta x = ut$, $\delta p = mu$, d.h. eine Funktion F, für die gilt $\delta x = \{x, F\}$ und $\delta p = \{p, F\}$.

Aufgabe H20 *Kanonische Transformation* (5 Punkte)

Gegeben seien ein mechanisches System mit der Hamiltonfunktion

$$H = \frac{1}{2m} p^2 q^4 + \frac{k}{2q^2}$$

und die Erzeugende einer kanonischen Transformation

$$F_1(q, Q) = -\sqrt{mk}\, \frac{Q}{q}.$$

(a) Wie lautet die Transformationsformel $p = p(Q, P)$ und $q = q(Q, P)$?

(b) Wie lautet die neue Hamiltonfunktion $\tilde{H} = \tilde{H}(Q, P)$?

(c) Geben Sie die Lösung des Problems in den Variablen Q, P an.

Bonusaufgaben

Aufgabe H21 *Phasenraumbahnen* (5 Punkte)

Skizzieren Sie für das nebenstehend gezeigte Potential die resultierenden Phasenraumbahnen für die drei eingezeichneten Energien E_1, E_2 und E_3 und markieren Sie den Durchlaufsinn.

(a) Können sich Phasenraumbahnen schneiden?

(b) Aus wie vielen Kurven besteht demnach die Separatrix, die zu der Energie E_2 gehört? Daraus ergibt sich die Durchlaufzeit der Separatrix.

(c) Unter welcher Steigung schneidet die Separatrix die q-Achse? Entwickeln Sie dazu das Potential in der Nähe des kritischen Punktes x_k.

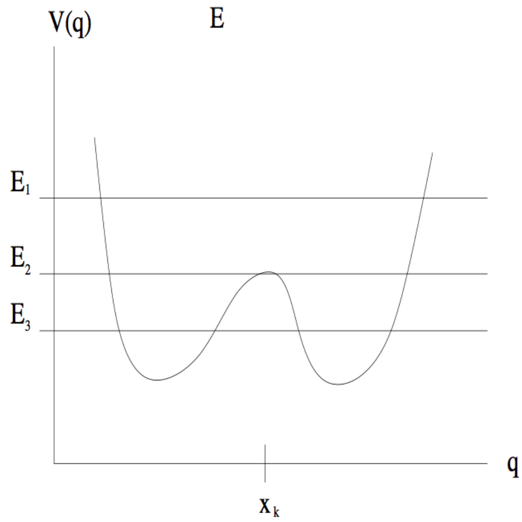

Abbildung 1: H21

Aufgabe H22 *Erhaltungsgrößen* (5 Punkte)

Die Hamiltonfunktion H für ein System von n Teilchen sei gegeben durch

$$H = f(p_1^2 + q_1^2, p_2^2 + q_2^2, \ldots, p_{n-1}^2 + q_{n-1}^2, p_n^2 + q_n^2).$$

Die Funktion f sei bekannt, q_i, p_i seien zueinander konjugierte Koordinaten und Impulse.

(a) Finden Sie n Konstanten der Bewegung: $I_i : \ \frac{\mathrm{d}I_i}{\mathrm{d}t} = 0$, $i = 1, \ldots, n$.

(b) Definieren Sie $\vartheta_i = \arctan \frac{q_i}{p_i}$ als neue generalisierte Koordinaten. Finden Sie die dazu konjugierten Impulse L_j als Funktionen der Erhaltungsgrößen $I_i : \ \{\vartheta_i, L_j\} = \delta_{ij}$.

(c) Lösen Sie die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen für diese neuen Koordinaten und Impulse.