4. Präsenzübung zur Analytischen Mechanik und Speziellen Relativität, WS 2016/17

(zu bearbeiten am Dienstag, 15.11.2016)

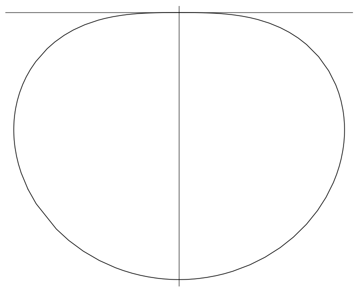
Aufgabe P07 *Drittes Keplersches Gesetz*

Betrachten Sie die Bewegung in einem Zentralpotential der Form:

$$V(\overrightarrow{r}) \sim |\overrightarrow{r}|^k , \qquad k \text{ reell} . \tag{1}$$

Finden Sie eine Reskalierung der Koordinaten $x^i \to \alpha x^i$ sowie der Zeit $t \to \beta t$, unter der sich die Lagrange-Funktion nur um einen Faktor ändert. Die Lagrange-Gleichungen sind invariant unter einer solchen Transformation (warum ?). Somit ist für eine gegebene Losung $x^i(t)$ die transformierte Trajektorie $\tilde{x}^i(\tilde{t}) = \alpha x^i(\beta t)$ ebenfalls eine Lösung, jedoch zu anderen Randbedingungen. Nutzen sie diesen Sachverhalt, um für den Keplerschen Fall, $k = -1$, das dritte Keplersche Gesetz abzuleiten. Wie hängt für den harmonischen Oszillator, $k = 2$, die Schwingungsperiode von der Amplitude ab?

Aufgabe P08 *Asteroiden-Engineering – "Lechtenfeld's Surface"*



Ein Asteroid mit homogener Massenverteilung ρ und fester Gesamtmasse μ wird von einer fortgeschrittenen Zivilisation so geformt, dass an einem Punkt der Oberfläche die Schwerkraft möglichst groß wird. Legen Sie den Oberflächenpunkt in den Ursprung. Überzeugen Sie sich durch ein Symmetrieargument davon, dass die Oberfläche rotationssymmetrisch um die z-Achse ist. Es genügt also, einen Schnitt mit der xz-Ebene zu betrachten. Setzen Sie die Randkurve als $R(\vartheta)$ an, wobei ϑ den Winkel gegen die negative z-Achse bezeichnet.
(a) Durch welches Integral $F[R]$ wird die im Ursprung wirkende z-Komponente der Gravitationskraft beschrieben? Mit welchem Integral $M[R]$ berechnet sich die Gesamtmasse μ? Führen Sie die Integrationen über φ und r aus. Berechnen Sie $F[R]$ für den Fall einer Kugel K mit dem Radius $r_{\mathrm{K}} = \sqrt[3]{\frac{3\mu}{4\pi\rho}}$, also für $R(\vartheta) = R_{\mathrm{K}}(\vartheta) \equiv 2\, r_{\mathrm{K}} \cos\vartheta$.
(b) Gesucht ist aber eine Randkurve $\overline{R}(\vartheta)$, die das Funktional $F[R]$ maximiert, wobei nur solche Kurven zur Variation zugelassen sind, die auf die Gesamtmasse $M[R] = \mu$ führen. Beide Bedingungen lassen sich gleichzeitig erfüllen, indem man nach einem Extremum von $U[R] = F[R] - \lambda(M[R] - \mu)$ sucht, wobei die reelle Konstante λ ein Lagrange-Multiplikator ist. Welche Gleichung ergibt sich für $\overline{R}(\vartheta)$ aus der Forderung nach einer verschwindenden Variation $\delta U = 0$? Die Lösung $\overline{R}_\lambda(\vartheta)$ enthält noch die Unbekannte λ. Bestimmen Sie diese, indem Sie mit dem erhaltenen $\overline{R}_\lambda(\vartheta)$ die Nebenbedingung $M[\overline{R}_\lambda] = \mu$ auswerten.
(c) Wie hoch ist der Wert der Oberflächen-Gravitation $F[\overline{R}]$? Vergleichen Sie mit $F[R_{\mathrm{K}}]$.
Ergebnis: $F[\overline{R}] \approx 1.026\, F[R_{\mathrm{K}}]$.