

Einführung in die Quantentheorie

Hausübung, Blatt 6

SoSe 2015

Abgabe: 04.06.2015

[H15] Lokalisiertes freies Teilchen

(3 Punkte)

Ein freies Teilchen sei für $t = 0$ lokalisiert:

$$\psi(x, 0) = \delta(x - x_0) = \int \frac{dk}{2\pi} e^{ik(x-x_0)}.$$

Berechnen Sie $\psi(x, t)$ auf die drei bekannten Arten:

- (a) Entwickeln Sie $|\psi(t)\rangle$ nach Eigenzuständen $|k\rangle$ des Hamilton-Operators und verwenden Sie, dass

$$\langle k|\psi(t)\rangle = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}E(k)t\right) \langle k|\psi(0)\rangle.$$

- (b) Der Propagator eines freien Teilchens in der Ortsdarstellung lautet

$$\langle x|U(t)|y\rangle = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar t}} \exp\left(\frac{im(x-y)^2}{2\hbar t}\right).$$

- (c) Benutzen Sie die Darstellung als Differentialoperator

$$\langle x|U(t)|y\rangle = \delta(x-y) \exp\left(\frac{i\hbar t}{2m}\partial_y^2\right).$$

[H16] Pfadintegral für freies Teilchen

(3 Punkte)

Berechnen Sie den Propagator eines freien Teilchens in einer Dimension,

$$U(x, t; x_0, t_0) = \langle x|U(t-t_0)|x_0\rangle,$$

durch „Diskretisierung“ des Feynmanschen Pfadintegrals. Zerlegen Sie dazu das Zeitintervall $[t_0, t]$ in N gleiche Teile der Länge $\varepsilon = (t-t_0)/N$, faktorisieren entsprechend den Operator $U(t-t_0)$, schieben zwischen alle Faktoren vollständige Ortsbasen $\{|z_n\rangle, n = 1, \dots, N-1\}$ ein und integrieren somit über $N-1$ Zwischenpunkte z_n . Das Pfadintegral ist definiert als Grenzwert für $N \rightarrow \infty$.

Wenn ε genügend klein ist, kann der Propagator für ein Teilstück von z_{n-1} nach z_n immer approximiert werden durch

$$U(z_n, t_n; z_{n-1}, t_{n-1}) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar\varepsilon}} \exp\left\{\frac{i}{\hbar} S_{\text{cl}}(z_{n-1}, t_{n-1}; z_n, t_n)\right\},$$

wobei $t_n = t_0 + n\varepsilon$ und S_{cl} die Wirkung für die gerade gleichförmige Bewegung zwischen den angegebenen Ereignissen ist. Berechnen Sie das $(N-1)$ -fache Integral zunächst für $N = 2$ und $N = 3$ und verallgemeinern Sie dann das Ergebnis auf beliebiges N . Wie hängt das Resultat von N und ε ab? Können Sie den Kontinuumsimes ausführen?

Bitte wenden

[H17] Messungen an einem Satz von Operatoren**(4 Punkte)**

Betrachten Sie die Operatoren

$$L_x \doteq \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_y \doteq \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad L_z \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Welche Messergebnisse für L_z gibt es? Berechnen Sie $\langle L_x \rangle$, $\langle L_x^2 \rangle$ und ΔL_x im Zustand $|L_z=+1\rangle$.
- (b) Berechnen Sie die Eigenwerte und die normierten Eigenzustände von L_x in der L_z -Basis.
- (c) Ein Teilchen sei im $|L_z=-1\rangle$ Zustand. Was sind die möglichen Ergebnisse, wenn man L_x messen würde? Geben Sie auch die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten an.
- (d) Gegeben sei der Zustand

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2}|L_z=+1\rangle + \frac{1}{2}|L_z=0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|L_z=-1\rangle.$$

Wenn L_z^2 gemessen wird und das Ergebnis $+1$ gibt, was ist der Zustand nach dieser Messung? Wie wahrscheinlich war dieses Ergebnis?

- (e) Geben Sie für den Zustand aus Punkt (d) die möglichen Ergebnisse bei einer L_z -Messung und deren Wahrscheinlichkeiten an.
- (f) Ein Teilchen sei in einem Zustand, in dem die Wahrscheinlichkeiten

$$W(L_z=+1) = \frac{1}{4}, \quad W(L_z=0) = \frac{1}{2}, \quad W(L_z=-1) = \frac{1}{4}$$

sind. Begründen Sie, daß der allgemeinste normierte Zustand mit dieser Eigenschaft geschrieben werden kann als

$$|\psi'\rangle = \frac{1}{2}e^{i\alpha}|L_z=+1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\beta}|L_z=0\rangle + \frac{1}{2}e^{i\gamma}|L_z=-1\rangle$$

mit beliebigen Phasen α , β und γ . Normierte Zustände $|\phi\rangle$ und $e^{i\theta}|\phi\rangle$ sind bekannterweise äquivalent. Bedeutet dies, dass die obigen Phasenfaktoren in $|\psi'\rangle$ irrelevant sind? Berechnen Sie zum Test $W(L_x=0)$.