

# Einführung in die Quantentheorie

Präsenzübung, Blatt 5

SoSe 2015

12./13.05.2015

---

## [P15] Teilchen auf endlichem Intervall

Ein Teilchen kann sich nur auf der  $x$ -Achse zwischen zwei unendlich hohen Wänden bei  $x = 0$  und  $x = L$  bewegen. Die Wahrscheinlichkeit, es außerhalb anzutreffen, ist also Null.

- Was bedeutet dies für die Wellenfunktion in der Ortsdarstellung? Geben Sie die Randbedingungen an. Zeigen Sie, dass der Operator  $P^2$  auf solchen Wellenfunktionen hermitesch ist.
- Bestimmen Sie für den Hamiltonoperator  $H = \frac{P^2}{2m}$  die Eigenwerte  $E_n$  und die normierten Eigenzustände  $|n\rangle$  in der Ortsdarstellung.
- Berechnen Sie für den Zustand  $|n\rangle$  die Erwartungswerte  $\langle X \rangle$  und  $\langle X^2 \rangle$  sowie  $\langle P \rangle$  und  $\langle P^2 \rangle$ . Überprüfen Sie die Unschärferelation  $\Delta P \Delta X \geq \hbar/2$ .
- Diskutieren Sie (a) für mögliche (?) alternative Randbedingungen  $\psi(x=0) = 0$  und  $\psi(x=L) = a$ .

## [P16] Zeitabhängige Wellenfunktion

Die zeitabhängige Wellenfunktion eines freien Teilchens mit der Masse  $m$  kann bestimmt werden mittels

$$\langle x|\psi(t)\rangle = \int dy \langle x|U(t)|y\rangle \langle y|\psi(0)\rangle.$$

Berechnen Sie auf drei Arten  $\psi(x, t)$  für den Fall, dass das Teilchen für  $t = 0$  einen scharfen Impuls  $k_0$  hat, also

$$\langle x|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(ik_0x).$$

- Entwickeln Sie  $|\psi(t)\rangle$  nach Eigenzuständen  $|k\rangle$  des Hamilton-Operators und verwenden Sie, dass

$$\langle k|\psi(t)\rangle = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}t E(k)\right) \langle k|\psi(0)\rangle.$$

- Der Propagator eines freien Teilchens in der Ortsdarstellung lautet

$$\langle x|U(t)|y\rangle = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar t}} \exp\left(\frac{im(x-y)^2}{2\hbar t}\right).$$

*Hinweis:* Es gilt  $\int_{-\infty}^{\infty} du e^{-\beta u^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}}$  für  $\text{Re}\beta \geq 0$ .

- Benutzen Sie die alternative Darstellung

$$\langle x|U(t)|y\rangle = \delta(x-y) \exp\left(\frac{i\hbar t}{2m} \partial_y^2\right).$$

Bleibt der Impuls scharf für  $t > 0$ ?