Einführung in die Quantentheorie

Präsenzübung, Blatt 14 **SoSe 2015** **21./22.07.2015**

[P33] Bosonische und fermionische Statistik

Betrachten Sie zwei nicht-wechselwirkende, identische Teilchen mit den Koordinaten x_1 und x_2, die die beiden niedrigsten Energieniveaus des eindimensionalen, quadratischen Potentials

$$V = \frac{1}{2} m\omega^2 \left(x_1^2 + x_2^2\right)$$

besetzen. Bestimmen Sie den Erwartungswert $\langle x_1 x_2 \rangle$ für folgende Fälle

(a) bosonische Teilchen,

(b) fermionische Teilchen,

(c) unterscheidbare Teilchen.

[P34] Parastatistik

Wir betrachten 3-Teilchen-Zustände, die sich unter Permutationen mit der irreduziblen "2"-Darstellung der symmetrischen Gruppe $\mathcal{S}_3$ transformieren. Gegeben seien dazu die Zustände

$$\begin{aligned}
|\Psi_+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}\big(|mnp\rangle + \omega|npm\rangle + \bar{\omega}|pmn\rangle\big) \\
|\Psi_-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}\big(|nmp\rangle + \omega|pnm\rangle + \bar{\omega}|mpn\rangle\big) \\
|\Phi_+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}\big(|nmp\rangle + \bar{\omega}|pnm\rangle + \omega|mpn\rangle\big) \\
|\Phi_-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}\big(|mnp\rangle + \bar{\omega}|npm\rangle + \omega|pmn\rangle\big),
\end{aligned}$$

wobei $\omega = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3} = (-1 + \mathrm{i}\sqrt{3})/2$ und $\bar{\omega} = \omega^2 = \omega^{-1} = (-1 - \mathrm{i}\sqrt{3})/2$ dritte Einheitswurzeln sind. Diese Zustände sind normiert und orthogonal zueinander.

(a) Geben Sie die bosonischen und fermionischen 3-Teilchen-Zustände an und zeigen Sie, dass sie orthogonal zu den oben angegebenen Zuständen sind. (Es genügt jeweils eine Beispielrechnung.)

(b) Überlegen Sie sich das Transformationsverhalten der Zustände $|\Phi_\pm\rangle$ unter der zyklischen Transformation $|123\rangle \to |312\rangle$ sowie unter der Vertauschung $|123\rangle \to |213\rangle$.

Bitte wenden

[P35] Fockraum für Parafermionen

Betrachten Sie hypothetische Teilchen mit den Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren

$$\left(a^\dagger\right)_{mn} \;=\; (a)_{nm} \;=\; \delta_{m,n+1}\sqrt{m(3-n)/3} \quad \text{für} \quad 0 \le n, m \le 3.$$

Der Erzeugungsoperator $a^\dagger$ erzeugt also ein Teilchen, während a entsprechend ein Teilchen vernichtet.

(a) Zeigen Sie, dass $\left(a^\dagger\right)^4 \;=\; 0$.

(b) Zeigen Sie

$$\left(a^\dagger\, a\right)_{mn} \;=\; \delta_{m,n} m(4-m)/3 \qquad \text{und} \qquad \left(a\, a^\dagger\right)_{mn} \;=\; \delta_{m,n}(m+1)(3-m)/3,$$

und berechnen Sie die Matrixelemente des Teilchenzahloperators

$$N \;:=\; \frac{3}{2}\left(a^\dagger\, a - a\, a^\dagger + \mathbb{1}\right).$$

Hat N die "richtigen" Eigenwerte?