Einführung in die Quantentheorie

Hausübung, Blatt 6 **SoSe 2018** **Abgabe: 29.05.2018**

[H15] Lokalisiertes freies Teilchen (3 Punkte)

Ein freies Teilchen sei für $t = 0$ lokalisiert:

$$\psi(x,0) \;=\; \delta(x-x_0) \;=\; \int\frac{\mathrm{d}k}{2\pi}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-x_0)}\,.$$

Berechnen Sie $\psi(x,t)$ auf die drei bekannten Arten:

(a) Entwickeln Sie $|\psi(t)\rangle$ nach Eigenzuständen $|k\rangle$ des Hamilton-Operators und verwenden Sie, dass

$$\langle k|\psi(t)\rangle \;=\; \exp\Bigl(-\tfrac{\mathrm{i}}{\hbar}E(k)t\Bigr)\,\langle k|\psi(0)\rangle\,.$$

(b) Benutzen Sie den Propagator eines freien Teilchens in der Ortsdarstellung,

$$\langle x|U(t)|y\rangle \;=\; \sqrt{\frac{m}{2\pi\mathrm{i}\hbar t}}\;\exp\Bigl(\frac{\mathrm{i}m(x-y)^2}{2\hbar t}\Bigr)\,.$$

(c) Benutzen Sie die Darstellung des Propagators als Differentialoperator

$$\langle x|U(t)|y\rangle \;=\; \delta(x-y)\,\exp\Bigl(\tfrac{\mathrm{i}\hbar t}{2m}\partial_y^2\Bigr)\,.$$

[H16] Pfadintegral für freies Teilchen (3 Punkte)

Berechnen Sie den Propagator eines freien Teilchens in einer Dimension,

$$U(x,t;x_0,t_0) \;=\; \langle x|U(t-t_0)|x_0\rangle\,,$$

durch „Diskretisierung“ des Feynmanschen Pfadintegrals. Zerlegen Sie dazu das Zeitintervall $[t_0,t]$ in N gleiche Abschnitte der Dauer $\varepsilon = (t{-}t_0)/N$, faktorisieren entsprechend den Operator $U(t{-}t_0)$, schieben zwischen alle Faktoren vollständige Ortsbasen $\{|z_n\rangle,\ n=1,\ldots,N{-}1\}$ ein und integrieren somit über $N{-}1$ Zwischenpunkte z_n. Das Pfadintegral ist definiert als Grenzwert für $N\to\infty$.

Wenn ε genügend klein ist, kann der Propagator für ein Teilstück von z_{n-1} nach z_n immer approximiert werden durch

$$U(z_n,t_n;z_{n-1},t_{n-1}) \;=\; \sqrt{\tfrac{m}{2\pi\mathrm{i}\hbar\varepsilon}}\;\exp\Bigl\{\tfrac{\mathrm{i}}{\hbar}\,S_{\mathrm{cl}}(z_{n-1},t_{n-1};z_n,t_n)\Bigr\}\,,$$

wobei $t_n = t_0{+}n\varepsilon$ und S_{cl} die Wirkung für die gerade gleichförmige Bewegung zwischen den angegebenen Ereignissen ist. Berechnen Sie das $(N{-}1)$-fache Integral zunächst für $N=2$ und $N=3$ und verallgemeinern Sie dann das Ergebnis auf beliebiges N. Wie hängt das Resultat von N und ε ab? Können Sie den Kontinuumslimes ausführen?

Bitte wenden

[H17] Messungen an einem Satz von Operatoren **(4 Punkte)**

Betrachten Sie die Operatoren

$$L_x \doteq \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_y \doteq \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ \mathrm{i} & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad L_z \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Welche Messergebnisse für L_z gibt es? Berechnen Sie $\langle L_x \rangle$, $\langle L_x^2 \rangle$ und ΔL_x im Zustand $|L_z{=}{+1}\rangle$.

(b) Berechnen Sie die Eigenwerte und die normierten Eigenzustände von L_x in der L_z-Basis.

(c) Ein Teilchen sei im $|L_z{=}{-1}\rangle$ Zustand. Was sind die möglichen Ergebnisse, wenn man L_x messen würde? Geben Sie auch die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten an.

(d) Gegeben sei der Zustand

$$|\psi\rangle = \tfrac{1}{2}|L_z{=}{+1}\rangle + \tfrac{1}{2}|L_z{=}0\rangle + \tfrac{1}{\sqrt{2}}|L_z{=}{-1}\rangle\,.$$

Wenn L_z^2 gemessen wird und das Ergebnis $+1$ gibt, was ist der Zustand nach dieser Messung? Wie wahrscheinlich war dieses Ergebnis?

(e) Geben Sie für den Zustand aus Punkt (d) die möglichen Ergebnisse bei einer L_z-Messung und deren Wahrscheinlichkeiten an.

(f) Ein Teilchen sei in einem Zustand, in dem die Wahrscheinlichkeiten

$$W(L_z{=}{+1}) = \frac{1}{4}, \quad W(L_z{=}0) = \frac{1}{2}, \quad W(L_z{=}{-1}) = \frac{1}{4}$$

sind. Begründen Sie, daß der allgemeinste normierte Zustand mit dieser Eigenschaft geschrieben werden kann als

$$|\psi'\rangle = \tfrac{1}{2}e^{\mathrm{i}\alpha}|L_z{=}{+1}\rangle + \tfrac{1}{\sqrt{2}}e^{\mathrm{i}\beta}|L_z{=}0\rangle + \tfrac{1}{2}e^{\mathrm{i}\gamma}|L_z{=}{-1}\rangle$$

mit beliebigen Phasen α, β und γ. Normierte Zustände $|\phi\rangle$ und $e^{\mathrm{i}\theta}|\phi\rangle$ sind bekannterweise äquivalent. Bedeutet dies, dass die obigen Phasenfaktoren in $|\psi'\rangle$ irrelevant sind? Berechnen Sie zum Test $W(L_x{=}0)$.