Einführung in die Quantentheorie

Präsenzübung, Blatt 1 **SoSe 2018** **10./11.04.2018**

[P1] Hermitesche Konjugation

Seien M eine 2×2 Matrix, $|\phi\rangle$ und $|\psi\rangle$ beliebige Zustandsvektoren sowie λ eine komplexe Zahl. Man zeige:

(a) $\langle\phi|M|\psi\rangle^* = \langle\psi|M^\dagger|\phi\rangle\,,$

(b) $M|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle \quad \Rightarrow \langle\psi|M^\dagger = \lambda^*\langle\psi|\,.$

[P2] Eigenwerte und Eigenvektoren einer hermiteschen Matrix

Gegeben sei die hermitesche Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 7 & \sqrt{2}+\mathrm{i} \\ \sqrt{2}-\mathrm{i} & 5 \end{pmatrix}\,.$$

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte a_i der Matrix A.

(b) Bestimmen Sie die Eigenvektoren $|\Psi_i\rangle$ und normieren Sie diese ($\langle\Psi_i|\Psi_i\rangle = 1$).

[P3] Entwicklung nach einer Basis

Entwickeln Sie

$$|\Psi\rangle \doteq \frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix} 3 \\ 2\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

nach den orthogonalen (?) Basisvektoren

$$|\Psi_1\rangle \doteq \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2}+\mathrm{i} \\ -1 \end{pmatrix}\,, \qquad |\Psi_2\rangle \doteq \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2}-\mathrm{i} \end{pmatrix}\,.$$

Gesucht ist also $|\Psi\rangle = c_1|\Psi_1\rangle + c_2|\Psi_2\rangle$. Ist $|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$ erfüllt?

[P4] Spur und Determinante

Seien A und B beliebige 2×2-Matrizen. Zeigen Sie:

(a) $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

(b) $\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - \lambda \mathrm{tr}A + \det A\,, \qquad \lambda \in \mathbb{C}$.