

Einführung in die Quantentheorie

Präsenzübung, Blatt 5

SoSe 2018

08./09.05.2018

[P15] Teilchen auf endlichem Intervall

Ein Teilchen kann sich nur auf der x -Achse zwischen zwei unendlich hohen Wänden bei $x = 0$ und $x = L$ bewegen. Die Wahrscheinlichkeit, es außerhalb anzutreffen, ist also Null.

- Was bedeutet dies für die Wellenfunktion in der Ortsdarstellung? Geben Sie die Randbedingungen an. Zeigen Sie, dass der Operator P^2 auf solchen Wellenfunktionen hermitesch ist.
- Bestimmen Sie für den Hamiltonoperator $H = \frac{P^2}{2m}$ die Eigenwerte E_n und die normierten Eigenzustände $|n\rangle$ in der Ortsdarstellung.
- Berechnen Sie für den Zustand $|n\rangle$ die Erwartungswerte $\langle X \rangle$ und $\langle X^2 \rangle$ sowie $\langle P \rangle$ und $\langle P^2 \rangle$. Überprüfen Sie die Unschärferelation $\Delta P \Delta X \geq \hbar/2$.
- Diskutieren Sie (a) für mögliche (?) alternative Randbedingungen $\psi(x=0) = 0$ und $\psi(x=L) = a$.

[P16] Zeitabhängige Wellenfunktion

Die zeitabhängige Wellenfunktion eines freien Teilchens mit der Masse m kann mit Hilfe des Zeitentwicklungsoperators $U(t) = \exp(-\frac{i}{\hbar}tH)$ auf verschiedene Weisen bestimmt werden. Berechnen Sie $\psi(x, t)$ auf drei Arten für den Fall, dass das Teilchen für $t = 0$ einen scharfen Impuls k_0 hat, also

$$\langle x | \psi(0) \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(ik_0x).$$

- Entwickeln Sie $|\psi(t)\rangle$ nach Eigenzuständen $|k\rangle$ des Hamilton-Operators H und verwenden Sie, dass

$$\langle k | \psi(t) \rangle = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}t E(k)\right) \langle k | \psi(0) \rangle.$$

- Verwenden Sie nun die Relation

$$\langle x | \psi(t) \rangle = \int dy \langle x | U(t) | y \rangle \langle y | \psi(0) \rangle.$$

Der Propagator eines freien Teilchens der Masse m in der Ortsdarstellung lautet

$$\langle x | U(t) | y \rangle = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar t}} \exp\left(\frac{im(x-y)^2}{2\hbar t}\right).$$

Hinweis: Es gilt $\int_{-\infty}^{\infty} du e^{-\beta u^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}}$ für $\text{Re}\beta \geq 0$.

- Benutzen Sie die alternative Darstellung

$$\langle x | U(t) | y \rangle = \delta(x-y) \exp\left(\frac{i\hbar t}{2m} \partial_y^2\right).$$

Bleibt der Impuls scharf für $t > 0$?