Einführung in die Quantentheorie

Hausübung, Blatt 1 **SoSe 2024** **Abgabe: 07.04.2024**

[H1] Exponentialfunktion einer Matrix (4 Punkte)

Auch für Matrizen definiert man die Exponentialfunktion mit Hilfe der Potenzreihenentwicklung:

$$\exp M = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} M^n \,.$$

(a) Sei M eine konstante Matrix. Zeigen Sie, dass die Lösung der Differentialgleichung $\frac{d}{dt}\vec{x}(t) = \mathrm{i}M\vec{x}(t)$ durch $\vec{x}(t) = \exp(\mathrm{i}tM)\vec{x}(0)$ gegeben ist.

(b) Sei M eine spurlose, imaginäre 2×2-Matrix und deshalb eine Linearkombination der drei Matrizen

$$M_1 = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix} \,, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \,, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \,.$$

Welche der M_i sind hermitesch, welche antihermitesch?
Berechnen Sie $U_i = \exp(\mathrm{i}tM_i)$; welche der U_i sind unitär?
Verifizieren Sie die Beziehung $\det(\exp A) = \exp(\operatorname{tr} A)$, $A = \mathrm{i}tM_i$.

[H2] Basistransformationen (3 Punkte)

Es bezeichnen $|x'(\theta)\rangle$ und $|y'(\theta)\rangle$ die Basisvektoren eines um den Winkel θ bzgl. der (x, y)-Basis gedrehten Koordinatensystems. Man zeige, dass die Komponenten $\langle x'(\theta)|\psi\rangle$, $\langle y'(\theta)|\psi\rangle$ eines Vektors $|\psi\rangle$ in dieser Basis die Differentialgleichungen

$$-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial\theta}\langle x'(\theta)|\psi\rangle = \langle x'(\theta)|S|\psi\rangle \,,$$
$$-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial\theta}\langle y'(\theta)|\psi\rangle = \langle y'(\theta)|S|\psi\rangle \,,$$

erfüllen (wobei $S = M_2$ aus Aufgabe **[H1]**(b)). Konstruieren Sie die explizite Lösung dieser Dgl. für $|\psi\rangle = |R\rangle$ und $|\psi\rangle = |L\rangle$. ($|R\rangle$ und $|L\rangle$ wie in der Vorlesung.)

Bitte wenden

[H3] Aufspaltung eines Atomstrahls (3 Punkte)

Jemand experimentiert mit einem Strahl von Helium-Atomen im angeregten $^3S_1$ Triplett-Zustand (Elektron-Konfiguration 1s2s, Kernspin 0). Die Atome werden demnach durch Zustandsvektoren in $\mathbb{C}^3$ charakterisiert. In einer geeigneten Basis wird die benutzte Stern-Gerlach-Messapparatur durch die Matrix

$$M \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

beschrieben. Sie spaltet den Atomstrahl auf in drei Teile, deren Atome sich dann jeweils in den Eigenzuständen

$$|{\rightarrow}\rangle \doteq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\circ\rangle \doteq \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |{\leftarrow}\rangle \doteq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

befinden. Die drei Teilstrahlen passieren unmittelbar darauf eine zweite, identische Messapparatur, welche gegenüber der ersten um 90° gedreht ist. Diese Drehung ist in $\mathbb{C}^3$ realisiert durch die Matrix

$$\mathcal{R} \doteq \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

so dass der zweite Satz von Eigenzuständen lautet

$$|\uparrow\rangle = \mathcal{R}\,|{\rightarrow}\rangle, \quad |\bullet\rangle = \mathcal{R}\,|\circ\rangle, \quad |\downarrow\rangle = \mathcal{R}\,|{\leftarrow}\rangle. \tag{4}$$

Bestimmen Sie die Intensitäten $W_{\alpha i}$ mit $i = \rightarrow, \circ, \leftarrow$ und $\alpha = \uparrow, \bullet, \downarrow$ der neun Teilstrahlen nach der zweiten Aufspaltung.