

Einführung in die Quantentheorie

Hausübung, Blatt 3

SoSe 2024

Abgabe: 21.04.2024

[H7] Pauli-Matrizen

(3 Punkte)

Die Pauli-Matrizen sind definiert als

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass

$$(\vec{a} \cdot \vec{\sigma})(\vec{b} \cdot \vec{\sigma}) = (\vec{a} \cdot \vec{b}) \mathbf{1} + i(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{\sigma}.$$

(b) Für $a_\mu = (a_0, \vec{a})$ und $\sigma^\mu = (\mathbf{1}, \vec{\sigma})$ ist zu prüfen, dass

$$\text{tr } a_\mu \sigma^\mu = 2a_0, \quad \det a_\mu \sigma^\mu = a_0^2 - \vec{a}^2.$$

[H8] 2×2 Dichteoperatoren

(4 Punkte)

Jeder 2×2 Dichteoperator kann wegen $\rho = \rho^\dagger$ und $\text{tr } \rho = 1$ in der Basis $\{\sigma^\mu\}$ der hermiteschen 2×2 Matrizen parametrisiert werden als

$$\rho = \frac{1}{2} a_\mu \sigma^\mu = \frac{1}{2} (\mathbf{1} + \vec{a} \cdot \vec{\sigma}). \quad (1)$$

Andererseits wissen wir, dass es zwei orthonormierte Eigenkets $|+\rangle$ und $|-\rangle$ geben muss, so dass

$$\rho = p|+\rangle\langle+| + (1-p)|-\rangle\langle-| \quad \text{mit } 0 \leq p \leq 1. \quad (2)$$

(a) Berechnen Sie $\det \rho$. Welche Bedingung an \vec{a} folgt aus der Einschränkung $0 \leq p \leq 1$? Beschreiben Sie geometrisch die Menge aller Dichteoperatoren (1).

(b) Geben Sie eine minimale Liste von Operatoren Ω_i an, aus deren gemessenen Erwartungswerten $\langle \Omega_i \rangle = \text{tr}(\rho \Omega_i)$ Sie \vec{a} ermitteln und damit ρ rekonstruieren können.

(c) Bestimmen Sie p als Funktion von \vec{a} . Finden Sie die Eigenkets $|+\rangle$ und $|-\rangle$ in der Parametrisierung (2).

Hinweis: der Fall $\vec{a} = a\vec{e}_3$ muss separat diskutiert werden.

(d) Schreiben Sie ρ^2 in der Darstellung (1). Wie groß ist $\text{tr } \rho^2$?

(e) Diskutieren Sie den reinen Fall. Was geschieht mit den Ergebnissen (a)–(d)?

(f) Was passiert bei $\vec{a} = 0$?

Bitte wenden

[H9] Langlebige und kurzlebige Kaonen**(3 Punkte)**

Die in einem Experiment zum Zeitpunkt $t = 0$ erzeugten neutralen Kaonen oder Anti-Kaonen sind verschiedene Linearkombinationen der Zustände $|K_L\rangle$ und $|K_S\rangle$ (langlebige bzw. kurzlebige Kaonen), genauer:

$$|K^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K_S\rangle + |K_L\rangle) \quad \text{oder} \quad |\bar{K}^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K_S\rangle - |K_L\rangle).$$

Zu einem späteren Zeitpunkt $t > 0$ hat sich ein langlebiger bzw. kurzlebiger Kaon-Zustand entwickelt gemäß

$$|K_S(t)\rangle = e^{-i\omega_S t}|K_S\rangle \quad \text{bzw.} \quad |K_L(t)\rangle = e^{-i\omega_L t}|K_L\rangle,$$

wobei $\omega_S < \omega_L$. Hierbei bleibt der Zerfall der Kaonen unberücksichtigt! Sei nun $|\psi(t=0)\rangle = |K^0\rangle$. Bestimmen Sie $|\psi(t)\rangle$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, zum Zeitpunkt t ein \bar{K}^0 zu finden (mit Skizze des Ergebnisses).