

# Einführung in die Quantentheorie

Hausübung, Blatt 6

SoSe 2024

Abgabe: 12.05.2024

## [H15] Lokalisiertes freies Teilchen

(3 Punkte)

Ein freies Teilchen sei für  $t = 0$  lokalisiert:

$$\psi(x, 0) = \delta(x - x_0) = \int \frac{dk}{2\pi} e^{ik(x-x_0)}.$$

Berechnen Sie  $\psi(x, t)$  auf die drei bekannten Arten:

- (a) Entwickeln Sie  $|\psi(t)\rangle$  nach Eigenzuständen  $|k\rangle$  des Hamilton-Operators und verwenden Sie, dass

$$\langle k|\psi(t)\rangle = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}E(k)t\right) \langle k|\psi(0)\rangle.$$

- (b) Benutzen Sie den Propagator eines freien Teilchens in der Ortsdarstellung,

$$\langle x|U(t)|y\rangle = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar t}} \exp\left(\frac{im(x-y)^2}{2\hbar t}\right).$$

- (c) Benutzen Sie die Darstellung des Propagators als Differentialoperator

$$\langle x|U(t)|y\rangle = \delta(x-y) \exp\left(\frac{i\hbar t}{2m} \partial_y^2\right).$$

## [H16] Pfadintegral für freies Teilchen

(3 Punkte)

Berechnen Sie den Propagator eines freien Teilchens in einer Dimension,

$$U(x, t; x_0, t_0) = \langle x|U(t-t_0)|x_0\rangle,$$

durch „Diskretisierung“ des Feynmanschen Pfadintegrals. Zerlegen Sie dazu das Zeitintervall  $[t_0, t]$  in  $N$  gleiche Abschnitte der Dauer  $\varepsilon = (t-t_0)/N$ , faktorisieren entsprechend den Operator  $U(t-t_0)$ , schieben zwischen alle Faktoren vollständige Ortsbasen  $\{|z_n\rangle, n = 1, \dots, N-1\}$  ein und integrieren somit über  $N-1$  Zwischenpunkte  $z_n$ . Das Pfadintegral ist definiert als Grenzwert für  $N \rightarrow \infty$ .

Wenn  $\varepsilon$  genügend klein ist, kann der Propagator für ein Teilstück von  $z_{n-1}$  nach  $z_n$  immer approximiert werden durch

$$U(z_n, t_n; z_{n-1}, t_{n-1}) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar\varepsilon}} \exp\left\{\frac{i}{\hbar} S_{\text{cl}}(z_{n-1}, t_{n-1}; z_n, t_n)\right\},$$

wobei  $t_n = t_0 + n\varepsilon$  und  $S_{\text{cl}}$  die Wirkung für die gerade gleichförmige Bewegung zwischen den angegebenen Ereignissen ist. Berechnen Sie das  $(N-1)$ -fache Integral zunächst für  $N = 2$  und  $N = 3$  und verallgemeinern Sie dann das Ergebnis auf beliebiges  $N$ . Wie hängt das Resultat von  $N$  und  $\varepsilon$  ab? Können Sie den Kontinuumsimes ausführen?

Bitte wenden

**[H17] Messungen an einem Satz von Operatoren****(4 Punkte)**

Betrachten Sie die Operatoren

$$L_x \doteq \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_y \doteq \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad L_z \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Welche Messergebnisse für  $L_z$  gibt es? Berechnen Sie  $\langle L_x \rangle$ ,  $\langle L_x^2 \rangle$  und  $\Delta L_x$  im Zustand  $|L_z=+1\rangle$ .
- (b) Berechnen Sie die Eigenwerte und die normierten Eigenzustände von  $L_x$  in der  $L_z$ -Basis.
- (c) Ein Teilchen sei im  $|L_z=-1\rangle$  Zustand. Was sind die möglichen Ergebnisse, wenn man  $L_x$  messen würde? Geben Sie auch die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten an.
- (d) Gegeben sei der Zustand

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2}|L_z=+1\rangle + \frac{1}{2}|L_z=0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|L_z=-1\rangle.$$

Wenn  $L_z^2$  gemessen wird und das Ergebnis  $+1$  gibt, was ist der Zustand nach dieser Messung? Wie wahrscheinlich war dieses Ergebnis?

- (e) Geben Sie für den Zustand aus Punkt (d) die möglichen Ergebnisse bei einer  $L_z$ -Messung und deren Wahrscheinlichkeiten an.
- (f) Ein Teilchen sei in einem Zustand, in dem die Wahrscheinlichkeiten

$$W(L_z=+1) = \frac{1}{4}, \quad W(L_z=0) = \frac{1}{2}, \quad W(L_z=-1) = \frac{1}{4}$$

sind. Begründen Sie, daß der allgemeinste normierte Zustand mit dieser Eigenschaft geschrieben werden kann als

$$|\psi'\rangle = \frac{1}{2}e^{i\alpha}|L_z=+1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\beta}|L_z=0\rangle + \frac{1}{2}e^{i\gamma}|L_z=-1\rangle$$

mit beliebigen Phasen  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$ . Normierte Zustände  $|\phi\rangle$  und  $e^{i\theta}|\phi\rangle$  sind bekannterweise äquivalent. Bedeutet dies, dass die obigen Phasenfaktoren in  $|\psi'\rangle$  irrelevant sind? Berechnen Sie zum Test  $W(L_x=0)$ .