

# Einführung in die Quantentheorie

Präsenzübung, Blatt 8

SoSe 2024

28./29.05.2024

---

## [P21] Bindungszustände im Delta-Potential

Ein Teilchen der Masse  $m$  befinde sich im Potential

$$V(x) = -W \delta(x) \quad \text{mit} \quad W > 0.$$

(a) Zeigen Sie die Gültigkeit der Anschlussbedingung

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\psi'(\epsilon) - \psi'(-\epsilon)) = -\frac{2mW}{\hbar^2} \psi(0).$$

Hierbei bezeichnet  $\psi'(x)$  die Ortsableitung der stetigen (?) Wellenfunktion.

*Hinweis:* Integrieren Sie die Schrödingergleichung mit  $\int_{-\epsilon}^{\epsilon} dx$ .

(b) Bestimmen Sie die Energieeigenwerte  $E_n < 0$  und die normierten Wellenfunktionen der Bindungszustände.

(c) Zeigen Sie explizit die Gültigkeit der Unschärferelation.

## [P22] Ritzsches Variationsverfahren

Eine Näherungsmethode zur Berechnung der Energie des Grundzustandes eines quantenmechanischen Systems, das durch den Hamiltonoperator  $H$  beschrieben wird, ist das sogenannte Ritzsche Variationsverfahren. Hierbei wird das Energiefunktional

$$E[\phi] := \langle \phi | H | \phi \rangle = \int dx \phi^*(x) H \phi(x) \quad (1)$$

durch Variation des normierten Zustandes  $|\phi\rangle$  bzw.  $\langle \phi|$  minimiert. Der entscheidende Aspekt dieses Verfahrens ist das Auffinden einer "guten" *trial function*  $\phi(x)_{\alpha, \beta, \dots} = \langle x | \phi_{\alpha, \beta, \dots} \rangle$ , die im Allgemeinen von mehreren Parametern  $\alpha, \beta, \dots$  abhängt.

Bestimmen Sie näherungsweise die Grundzustandsenergie des Hamiltonoperators des harmonischen Oszillators (Ortsdarstellung),

$$H \doteq -\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x^2 + \frac{m\omega^2}{2} x^2, \quad (2)$$

durch Minimieren des Energiefunktionals  $E[\phi]$ . Verwenden Sie dazu die *trial function* und deren Variation

$$\phi_\alpha(x) = \sqrt{\alpha} e^{-\alpha|x|}, \quad \delta\phi_\alpha(x) = \partial_\alpha \phi_\alpha(x). \quad (3)$$

überprüfen Sie zu Beginn, ob  $\phi_\alpha(x)$  normiert ist. Vergleichen Sie das Ergebnis der Näherung mit der exakten Grundzustandsenergie  $E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}$ .

*Hinweis:* Verwenden Sie, dass  $H$  nicht von  $\alpha$  abhängt.