

Einführung in die Quantentheorie

Präsenzübung, Blatt 14

SoSe 2024

09./10.07.2024

[P33] Bosonische und fermionische Statistik

Betrachten Sie zwei nicht-wechselwirkende, identische Teilchen mit den Koordinaten x_1 und x_2 , welche sich im eindimensionalen, quadratischen Potential

$$V = \frac{1}{2}m\omega^2(x_1^2 + x_2^2)$$

bewegen. Eines der Teilchen befinde sich im Grundzustand, das andere im ersten angeregten Energie-Eigenzustand. Bestimmen Sie den Erwartungswert $\langle x_1 x_2 \rangle$ für folgende Fälle

- (a) bosonische Teilchen,
- (b) fermionische Teilchen,
- (c) unterscheidbare Teilchen.

[P34] Parastatistik

Wir betrachten Dreiteilchenzustände, die sich unter Permutationen in der irreduziblen “2”-Darstellung der symmetrischen Gruppe \mathfrak{S}_3 transformieren. Gegeben seien dazu die Zustände (n, m, p seien alle verschieden)

$$\begin{aligned} |\Psi_+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}(|mnp\rangle + \omega|npm\rangle + \bar{\omega}|pmn\rangle), \\ |\Psi_-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}(|nmp\rangle + \omega|pnm\rangle + \bar{\omega}|mpn\rangle), \\ |\Phi_+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}(|nmp\rangle + \bar{\omega}|pnm\rangle + \omega|mpn\rangle), \\ |\Phi_-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}(|mnp\rangle + \bar{\omega}|npm\rangle + \omega|pmn\rangle), \end{aligned} \tag{1}$$

wobei $\omega = e^{2\pi i/3} = (-1 + i\sqrt{3})/2$ und $\bar{\omega} = \omega^2 = \omega^{-1} = (-1 - i\sqrt{3})/2$ dritte Einheitswurzeln sind. Diese Zustände sind normiert und orthogonal zueinander.

- (a) Geben Sie die bosonischen und fermionischen Dreiteilchenzustände an und zeigen Sie, dass diese orthogonal zu den oben angegebenen Zuständen sind. (Es genügt jeweils eine Beispielrechnung.)
- (b) Überlegen Sie sich das Transformationsverhalten der Zustände $|\Phi_{\pm}\rangle$ unter der zyklischen Transformation $|123\rangle \rightarrow |312\rangle$ sowie unter der Vertauschung $|123\rangle \rightarrow |213\rangle$.

Bitte wenden

[P35] Fockraum für Parafermionen

Betrachten Sie hypothetische Teilchen mit den Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren

$$(a^\dagger)_{mn} = (a)_{nm} = \delta_{m,n+1} \sqrt{m(3-n)/3} \quad \text{für } 0 \leq n, m \leq 3.$$

Der Erzeugungsoperator a^\dagger erzeugt also ein Teilchen, während a entsprechend ein Teilchen vernichtet.

(a) Zeigen Sie, dass $(a^\dagger)^4 = 0$.

(b) Zeigen Sie

$$(a^\dagger a)_{mn} = \delta_{m,n} m(4-m)/3 \quad \text{und} \quad (a a^\dagger)_{mn} = \delta_{m,n} (m+1)(3-m)/3,$$

und berechnen Sie die Matrixelemente des Teilchenzahloperators

$$N := \frac{3}{2}(a^\dagger a - a a^\dagger + \mathbf{1}).$$

Hat N die “richtigen” Eigenwerte?