12. Hausübung zur Quantentheorie II, SS 2001

(abzugeben am Dienstag, 3.7.2001)

Aufgabe H33 *Bewegtes Elektron* (5 Punkte)

Ein ruhendes freies Elektron, das sich in einem Spin-Eigenzustand gemäß $\sigma_z \psi = \psi$ befindet, wird durch die Wellenfunktion

$$\psi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-imt}$$

beschrieben. Finden Sie die Wellenfunktion eines freien Elektrons, das sich mit der Geschwindigkeit $+v$ in x-Richtung bewegt, indem Sie auf ein mit $-v$ relativ zum Ruhesystem bewegtes Koordinatensystem transformieren. Befindet sich das bewegte Elektron noch in einem Eigenzustand von σ_z?
Hinweis:
Verwenden Sie $\psi'(x') = e^{-\frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}\Sigma^{\alpha\beta}}\psi(x)$ aus der Vorlesung, und überlegen Sie sich, welches $\omega_{\alpha\beta} \neq 0$ ist. Nennen Sie dies ω. Es gilt $\tanh\omega = -v$.

Aufgabe H34 *Ladungskonjugation* (5 Punkte)

Bestimmen Sie die Transformation, die aus einem Spinor ψ mit der Ladung q, der also die Diracgleichung

$$(i\gamma^\mu(\partial_\mu - iqA_\mu) - m)\psi = 0$$

erfüllt, den ladungskonjugierten Spinor ψ^c mit der Ladung $-q$ macht, für den demnach

$$(i\gamma^\mu(\partial_\mu + iqA_\mu) - m)\psi^c = 0$$

gilt. Machen Sie dazu den Ansatz $\psi^c = C\bar{\psi}^T = C\gamma^0\psi^*$, und zeigen Sie, daß $C = i\gamma^2\gamma^0$.
Welches Transformationsverhalten unter Ladungskonjugation haben die Bilinearformen $\bar{\psi}\psi$, $i\bar{\psi}\gamma_5\psi$ sowie $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$?
Hinweise:
Es gilt $\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0 = \gamma^{\mu\dagger}$ und $\gamma^2\gamma^{\mu\dagger}\gamma^2 = \gamma^{\mu T}$. Für die Transformation der Bilinearformen ist es hilfreich, Spinorindizes explizit auszuschreiben.

b.w.

<u>Aufgabe H35</u> *Kohärente Zustände des elektromagnetischen Feldes* (5 Punkte)

Das quantisierte elektromagnetische Feld lautet (für nur eine Polarisation)

$$A_\mu = \int d\tilde{k}\, [a(\vec{k})\epsilon_\mu(\vec{k})e^{-ikx} + a^\dagger(\vec{k})\epsilon^*_\mu(\vec{k})e^{ikx}] \quad ; \quad \epsilon_\mu = (\epsilon_0, -\vec{\epsilon})$$

mit

$$[a(\vec{k}), a^\dagger(\vec{q})] = 2k^0(2\pi)^3\delta^3(\vec{k}-\vec{q}) \; .$$

Hier wird die Notation $d\tilde{k} := d^3k/[(2\pi)^3(2k^0)]$ mit $k^0 = k^0(\vec{k})$ für das lorentzinvariante Impulsraum-Integrationsmaß benutzt.

a) Normieren Sie den n-Photon-Zustand

$$|n\rangle \equiv |F(\vec{k}_1, \ldots, \vec{k}_n)\rangle = \alpha_n \int d\tilde{k}_1 ... d\tilde{k}_n\, F(\vec{k}_1, ..., \vec{k}_n) a^\dagger(\vec{k}_1) ... a^\dagger(\vec{k}_n)\, |0\rangle \;\; ,$$

(wobei F symmetrisch in den Impulsen ist), d.h. bestimmen Sie α_n sowie $\langle n|\, m\rangle$.

b) Welche Norm hat der kohärente Zustand

$$\begin{aligned} |\tilde{\eta}\rangle &= e^{\int d\tilde{k}\, \tilde{\eta}(\vec{k})\, a^\dagger(\vec{k})} |0\rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d\tilde{k}_1 ... d\tilde{k}_n\, \eta(\vec{k}_1) ... \eta(\vec{k}_n) a^\dagger(\vec{k}_1) ... a^\dagger(\vec{k}_n)\, |0\rangle \;? \end{aligned}$$

Berechnen Sie $a(\vec{q})\, |\tilde{\eta}\rangle$.

c) Sei $|\eta\rangle$ der normierte kohärente Zustand und $N = \int d\tilde{k}\, a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k})$ der Anzahl-Operator. Berechnen Sie $(\Delta N)^2 = \langle\eta|\, N^2\, |\eta\rangle - \langle\eta|\, N\, |\eta\rangle^2$.