3. Hausübung zur Quantentheorie II, SS 2001

(abzugeben am Dienstag, 24.4.2001)

Aufgabe H7 *Korrelierte Systeme* (6 Punkte)

Der Zustand zweier gekoppelter Zweizustandssysteme sei gegeben durch

$$|\psi\rangle \;=\; (|0\rangle + |1\rangle)_A \otimes (0.4\,|0\rangle + 0.3\,|1\rangle)_B \;+\; (|0\rangle - |1\rangle)_A \otimes (0.3\,|0\rangle + 0.4\,|1\rangle)_B \;.$$

a) Zeigen Sie, daß $|\psi\rangle$ normiert ist.

b) Berechnen Sie die Erwartungswerte der Observablen $\sigma_i \otimes \mathbb{1}$, $\mathbb{1} \otimes \sigma_i$ und $\sigma_i \otimes \sigma_j$.

c) Geben Sie die reduzierten Dichteoperatoren ϱ_A und ϱ_B an.

d) Bestimmen Sie die Schmidtzerlegung von $|\psi\rangle$.

Aufgabe H8 *Dichteoperator des Singletts* (4 Punkte)

Gegeben sei das Singlett,

$$|\psi\rangle \;=\; \tfrac{1}{\sqrt{2}}\Big(|01\rangle - |10\rangle\Big) \;.$$

a) Schreiben Sie $|\psi\rangle$ in einer anderen Basis, die gegeben ist durch $|\bar{0}\rangle = \alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle$ und $|\bar{1}\rangle = -\beta^*\,|0\rangle + \alpha^*\,|1\rangle$, mit $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

b) Zeigen Sie, daß $|\psi\rangle\,\langle\psi|$ sich auch schreiben läßt als

$$\varrho \;=\; \frac{1}{4}\Big(\mathbb{1} \otimes \mathbb{1} - \sum_i \sigma_i \otimes \sigma_i\Big) \;.$$

b.w.

Aufgabe H9 *Die Güte einer Messung* (5 Punkte)

Sei ein Zweizustandssystem (qubit) in einem unbekannten *reinen* Zustand $|\psi\rangle$. Der zugehörige Dichteoperator $|\psi\rangle\langle\psi| = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \vec{s}_{|\psi\rangle} \cdot \vec{\sigma})$ wird bekanntermaßen durch einen Einheitsvektor $\vec{s}_{|\psi\rangle}$ auf der Blochsphäre $\mathcal{B}$ charakterisiert.

a) Man rät auf gut Glück, daß der Zustand $|\phi\rangle$ ist. Die Güte ("fidelity") der Schätzung ist definiert durch

$$F(|\phi\rangle) \;:=\; |\langle\phi|\,\psi\rangle|^2 \;=\; \operatorname{tr}\Big(|\phi\rangle\langle\phi|\,\psi\rangle\langle\psi|\Big)\,.$$

Wie groß ist bei blindem Raten aus einem gleichmäßig über die Blochsphäre verteilten Ensemble *im Mittel* die Güte, d.h.

$$\overline{F} \;=\; \frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{B}} F(|\phi\rangle)\, d^2\Omega \;=\; \operatorname{tr}\left(\frac{1}{4\pi}\int \tfrac{1}{2}(\mathbb{1} + \vec{s}_{|\phi\rangle}\cdot\vec{\sigma})\ \tfrac{1}{2}(\mathbb{1} + \vec{s}_{|\psi\rangle}\cdot\vec{\sigma})\ \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\right)$$

wobei (θ, φ) die Orientierung von $\vec{s}_{|\phi\rangle}$ relativ zu $\vec{s}_{|\psi\rangle}$ beschreibt.

b) Man macht eine Spin-Messung von $|\psi\rangle$ entlang der z-Achse. Da das Ergebnis $\uparrow$ mit einer Wahrscheinlichkeit $W_\uparrow(|\psi\rangle) = \langle\psi\,|P_\uparrow|\,\psi\rangle$ auftritt und den Zustand $|\psi\rangle\langle\psi|$ nach $P_\uparrow$ kollabiert, kann diese Messung interpretiert werden als die Präparation eines (gemischten) Zustands

$$\varrho \;=\; \langle\psi\,|P_\uparrow|\,\psi\rangle\ P_\uparrow \;+\; \langle\psi\,|P_\downarrow|\,\psi\rangle\ P_\downarrow\,,$$

wobei $P_{\uparrow(\downarrow)}$ der Projektor auf den Zustand mit Spin auf (ab) entlang der z-Achse ist. Mit welcher gemittelten Güte

$$\overline{F} \;=\; \overline{\operatorname{tr}\left(\varrho\ |\psi\rangle\langle\psi|\right)} \;=\; \overline{\langle\psi\,|\varrho|\,\psi\rangle}$$

repräsentiert diese Dichtematrix den unbekannten Zustand $|\psi\rangle$?

Bemerkung: Die Verbesserung von $\overline{F}$ in b) gegenüber a) zeigt, daß man durch die Messung Information erhalten hat.