7. Hausübung zur Quantentheorie II, SS 2001

(abzugeben am Dienstag, 22.5.2001)

Aufgabe H18 *Maximale Verletzung der CHSH-Ungleichung* (6 Punkte)

In der Präsenzübung P13 haben Sie die CHSH-Ungleichung kennengelernt. Beobachter 1 seien die Observablen $A = \vec{\alpha}\cdot\vec{\sigma}_1$ und $C = \vec{\gamma}\cdot\vec{\sigma}_1$ zugeordnet, Beobachter 2 die Observablen B und D (Spinmessung in Richtung der Einheitsvektoren $\vec{\beta}$ bzw. $\vec{\delta}$). Die Meßergebnisse seien a, b, c, d. Zeigen Sie, daß die maximale Verletzung dieser Ungleichung für ein Singlett zweier Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen erreicht wird, wenn die aufeinanderfolgenden Meßrichtungen $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}, \vec{\delta}$ in einer Ebene liegen und sich jeweils um 45° unterscheiden.

a) Zeigen Sie dazu zunächst, daß mit der Definition des Operators O

$$O = AB + BC + CD - DA$$

folgt:

$$O^2 = 4 + [A, C] \cdot [B, D] \ .$$

b) Die Norm eines Operators M ist definiert durch

$$||M|| = \sup_{|\psi\rangle} \frac{||M\,|\psi\rangle\,||}{||\,|\psi\rangle\,||} \ ,$$

mit $||\,|\psi\rangle\,||^2 = \langle\psi|\,\psi\rangle$. Die Operatornorm hat die Eigenschaften

$$\begin{aligned} ||MN|| &\leq ||M|| \cdot ||N|| \ , \\ ||M + N|| &\leq ||M|| + ||N|| \ . \end{aligned}$$

Für diagonalisierbare Operatoren gilt ferner $||M^2|| = ||M||^2$. Geben Sie damit eine Obergrenze für die Norm des Operators O an (Cirel'son-Ungleichung). Zeigen Sie, daß diese Obergrenze durch die angegebenen Winkel erreicht wird.

Aufgabe H19 *Das "No-Cloning"-Theorem* (4 Punkte)

Nehmen Sie an, man könne einen unbekannten Quantenzustand von einem System in ein zweites kopieren, d.h. es gäbe eine unitäre Transformation U auf dem Produktraum mit $U\,|\psi\rangle\,|0\rangle = |\psi\rangle\,|\psi\rangle$ für *jeden* Zustand $|\psi\rangle$ eines Spin-$\frac{1}{2}$-Systems. Führen Sie diese Annahme mit zwei verschiedenen Argumenten zum Widerspruch (Wootters und Zurek 1982):

a) *Linearität von U*: Betrachten Sie die Wirkung von U auf die Basiszustände $|0\rangle\,|0\rangle$ und $|1\rangle\,|0\rangle$, sodann auf die Linearkombination $\alpha\,|0\rangle\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle\,|0\rangle$.

b) *Erhaltung des Skalarprodukts*: Eine unitäre Transformation erhält bekanntlich das Skalarprodukt. Nehmen Sie an, daß zwei nicht-orthogonale Zustände kopiert werden können und betrachten Sie deren Skalarprodukt vor und nach Anwendung der hypothetischen Transformation U.

Anmerkung: Der *Anfangszustand* des zweiten Systems wird vorgegeben und kann willkürlich gewählt werden, in diesem Fall als $|0\rangle$.

b.w.

Aufgabe H20 *Entropie als Maß für Verschränkung?* (5 Punkte)

Die Entropie eines quantenmechanischen Zwei-Zustands-Systems ist gegeben durch

$$S = -\ \mathrm{tr}(\varrho \log_2 \varrho) \ ,$$

wobei der Logarithmus einer Matrix über ihre Darstellung in der Eigenbasis definiert ist. Überlegen Sie sich, ob die Entropie der reduzierten Dichtematrix eines Zwei-Teilchen-Systems ein gutes Maß für die Verschränkung des Gesamtsystems ist: gegeben seien

a) $|\psi_a\rangle = |00\rangle$,

b) $|\psi_b\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$,

c) $\varrho_c = \frac{1}{2}\mathbb{1} \otimes \frac{1}{2}\mathbb{1}$.

Wie groß ist in jeden der drei Fälle die Entropie der reduzierten Dichtematrix des ersten Teilsystems? Begründen Sie, warum Sie die Entropie als Verschränkungsmaß akzeptieren/nicht akzeptieren.