9. Hausübung zur Quantentheorie II, SS 2001

(abzugeben am Dienstag, 12.6.2001)

Aufgabe H24 *Konkavität der Entropie* (5 Punkte)

Zeigen Sie mit Hilfe der Subadditivität, daß die Entropie eine *konkave* Funktion ist, d.h.

$$S(\sum_i \lambda_i \varrho_i) \geq \sum_i \lambda_i S(\varrho_i) \quad , \quad \lambda_i \in [0,1] \ ,$$

mit $\sum_i \lambda_i = 1$.

Hinweise: Wenden Sie Subadditivität auf $\varrho_{AB} = \sum_i \lambda_i \, \varrho_{i\,A} \otimes |e_i\rangle\langle e_i|_B$ an, wobei $\{|e_i\rangle\}$ eine vollständige Orthonormalbasis bezeichnet. Es gilt

$$-\ \mathrm{tr}\Big(\sum_i \varrho_i \otimes |e_i\rangle\langle e_i| \log(\sum_j \varrho_j \otimes |e_j\rangle\langle e_j|)\Big) = -\ \mathrm{tr}\Big(\sum_i \varrho_i \otimes |e_i\rangle\langle e_i| \log(\varrho_i \otimes |e_i\rangle\langle e_i|)\Big) \ .$$

Benutzen Sie ferner

$$\log\left(\varrho_A \otimes \varrho_B\right) = \log \varrho_A \otimes \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_A \otimes \log \varrho_B \ .$$

Aufgabe H25 *WKB-Näherung und Energie-Niveaus* (5 Punkte)

Die Energieniveaus E des diskreten Spektrums eines Teilchens mit Masse m im Potential V sind durch die Anschlußbedingungen an den Umkehrpunkten a und b der klassischen Bewegung gemäß der Quantisierungsregel

$$\int_a^b dx \sqrt{2m(E - V(x))} = \hbar(n + \tfrac{1}{2})\pi$$

festgelegt, wobei n positiv und ganzzahlig ist.

a) Sei $V(x) = V_0(|x|/l)^\lambda$. Geben Sie die Potenz κ in $E_n \sim n^\kappa$ an, und skizzieren Sie das Potential sowie die Energieniveaus für $\lambda = 1, 2, 4$.

b) Sei nun $\lambda = 2$ und $V_0 = \frac{m}{2}\omega^2 l^2$, d.h. der harmonische Oszillator. Wie lauten die Eigenwerte E_n? Hätten Sie das Ergebnis erwarten dürfen?

c) Betrachten Sie nun ein Kastenpotential mit der Breite $2l$, d.h. $\lambda \to \infty$. Was erhalten Sie für E_n? Warum konnten Sie nicht damit rechnen, die exakte Lösung zu finden?

b.w.

Aufgabe H26 *Pfadintegral für den harmonischen Oszillator* (5 Punkte)

Der Zeitentwicklungsoperator für den eindimensionalen harmonischen Oszillator, d.h. $V(x) = \frac{1}{2}\omega^2 x^2$ ist im Pfadintegralformalismus gegeben durch

$$U(x_f, t_f; x_i, t_i) = \lim_{N\to\infty} \int \prod_{k=1}^{N-1} dx_k \Big(\frac{m}{2\pi i\hbar\Delta t}\Big)^{\frac{N}{2}} e^{\frac{i}{\hbar}S[x]} \ ,$$

mit der Wirkung

$$S[x] = \Delta t \sum_{k=1}^{N} \left\{ \frac{m}{2}\Big(\frac{x_k - x_{k-1}}{\Delta t}\Big)^2 - \tfrac{1}{2}m\omega^2 x_k^2 \right\} \ .$$

a) Bestätigen Sie, daß das Extremum von $S[x]$ dem klassischen Pfad entspricht, indem Sie zeigen, daß das Verschwinden der Variation der Wirkung, d.h. $\partial S[x]/\partial x_k = 0$, zusammen mit $\Delta t \to 0$ auf die klassische Bewegungsgleichung führt.

b) Führen Sie nun eine neue Integrationsvariable $\eta(t) = x(t) - x_{kl}(t)$ ein, wobei $x_{kl}(t)$ die Lösung der klassischen Bewegungsgleichung ist, mit den Randbedingungen $x_{kl}(t_{i,f}) = x_{i,f}$. Entwickeln Sie damit die Wirkung $S[x]$ um den klassischen Weg. Zeigen Sie, daß dies auf folgende Exponentialfunktion einer quadratischen Form führt:

$$U = e^{\frac{i}{\hbar}S[x_{kl}]} \lim_{N\to\infty} \Big(\frac{m}{2\pi i\hbar\Delta t}\Big)^{\frac{N}{2}} \Big(\frac{2\pi\Delta t}{m}\Big)^{\frac{1}{2}(N-1)} \int \prod_{k=1}^{N-1} d\eta_k e^{i\eta^T B\eta} \ ,$$

wobei η^T für den Vektor $(\eta_0 \equiv \eta_i, \eta_1, \eta_2, ...\eta_{N-1}, \eta_N \equiv \eta_f)$ steht. Welche Gestalt hat die Matrix B?

Anmerkung: Die Determinante von B kann mit einigen weiteren Schritten berechnet werden, damit auch das Integral in U, und man findet schließlich die explizite Lösung für U - dies ist nicht mehr Teil der Aufgabe!