Klausur zur Quantentheorie II, SS 2001 07.07.2001

Schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer auf **jedes** Blatt!! Viel Erfolg!

Aufgabe 1 *Kurzfragen* (je 0.5 Punkte)

a) Wieviele reelle Parameter benötigt die Festlegung eines reinen Qubit-Zustandes?

b) Es gelte $\varrho\,(\mathbb{1}-\varrho)=0$. Ist ϱ ein reiner Zustand oder ein Gemisch?

c) $A=|\psi\rangle\langle\phi|$. Vereinfachen Sie $\mathrm{tr}(A^2)$.

d) Gilt $\sigma_x\otimes\sigma_z=\sigma_z\otimes\sigma_x$?

e) Welche der folgenden Zustände eines 2-Qubit-Systems sind verschränkt:
$|01\rangle$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle-|10\rangle)$, $\frac{1}{2}\big(|0\rangle+|1\rangle\big)\otimes\big(|0\rangle-|1\rangle\big)$?

f) Sind Superoperatoren invertierbar?

g) Ist der Dichteoperator im Heisenbergbild zeitabhängig?

h) Sei $\phi(x)$ ein Klein-Gordon-Feld. $\langle 0|\,\phi(x)\,|0\rangle=$?

i) Welche der folgenden Größen sind Lorentz-invariant:
Energie E , Drehimpuls-Quadrat $\vec{L}^2$, Masse $m\int \mathrm{d}^4x\;\psi^\dagger\gamma^0\psi$?

j) $\gamma^\mu\gamma^\nu\;=\;\frac{1}{2}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]+$?

Aufgabe 2 *Bose-Feld im Fockraum* (5 Punkte)

Gegeben sei ein nichtrelativistisches Bose-Feld $\psi(\vec{r})\;=\;\sum_k u_k(\vec{r})\,a_k$, wobei $u_k(\vec{r})$ ein vollständiges Funktionensystem der korrespondierenden Schrödingergleichung ist. Für den Vakuumzustand $|0\rangle$ des Systems gilt:

$$\langle 0|\,0\rangle=1 \qquad \text{und} \qquad a_k\,|0\rangle=0\;\;\forall\;k\;.$$

Betrachten Sie die Zustände $|i\rangle=a_i^\dagger\,|0\rangle$ und $|i,j\rangle=a_i^\dagger a_j^\dagger\,|0\rangle$ mit $i\neq j$.

a) Zeigen Sie, daß diese Zustände Eigenzustände zum Teilchenzahloperator $N=\sum_k a_k^\dagger a_k$ sind, d.h. daß $N\,|i\rangle=n_1\,|i\rangle$ sowie $N\,|i,j\rangle=n_2\,|i,j\rangle$ gilt. Geben Sie n_1 und n_2 an.

b) Zeigen Sie, daß der Feldimpuls-Operator

$$\vec{P}\;=\;\int \mathrm{d}^3r\;\psi^\dagger(\vec{r})\,\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}\,\psi(\vec{r})$$

die Matrixelemente

$$\langle i|\,\vec{P}\,|i\rangle=n_1\,\vec{p}_{ii} \qquad \text{und} \qquad \langle i,j|\,\vec{P}\,|i,j\rangle=\tfrac{1}{2}n_2\,(\vec{p}_{ii}+\vec{p}_{jj})$$

besitzt, wobei wir $\vec{p}_{\ell m}=\int \mathrm{d}^3r\;u_\ell^*(\vec{r})\,\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}u_m(\vec{r})$ abkürzen.

Hinweis: Es gilt $[a_\ell,a_m^\dagger]=\delta_{\ell m}$.

Aufgabe 3 *Dirac-Gleichung mit elektromagnetischem Feld* (5 Punkte)

Die Dirac-Gleichung ($\hbar$=c=1) im elektromagnetischen Feld $A_\mu(x)$,

$$[i\gamma^\mu D_\mu - m]\,\psi = 0 \qquad \text{mit} \quad D_\mu := \partial_\mu + ieA_\mu \ ,$$

kann "quadriert" werden zu einer Klein-Gordon-Gleichung mit einem Zusatzterm $\mathcal{Z}$:

$$[(D^\mu D_\mu + m^2) + \mathcal{Z}]\,\psi = 0 \ .$$

Zeigen Sie, daß der Zusatzterm die folgende Gestalt hat:

$$\mathcal{Z} = \frac{ie}{4}\,[\gamma^\mu, \gamma^\nu] F_{\mu\nu} \ .$$

Hinweis: Aufgabe 1j) sowie $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$. Es ist $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.

Aufgabe 4 *Zusammengesetzte Systeme* (5 Punkte)

Gegeben seien zwei Zustände $|\psi_1\rangle$ und $|\psi_2\rangle$, die jeweils aus zwei Qubits A und B (mit der Basis $\{|0\rangle, |1\rangle\}$) zusammengesetzt sind:

$$\begin{aligned} |\psi_1\rangle &= \tfrac{1}{2}\big(i\,|00\rangle + |01\rangle - |10\rangle + i\,|11\rangle\big) \ , \\ |\psi_2\rangle &= \tfrac{1}{2}\big(q\,|00\rangle + q\,|01\rangle + q^*\,|10\rangle - q^*\,|11\rangle\big) \qquad \text{mit} \quad q = e^{i\pi/4} = \tfrac{1+i}{\sqrt{2}} \ . \end{aligned}$$

a) Geben Sie die Schmidt-Zerlegung von $|\psi_1\rangle$ und $|\psi_2\rangle$ an.

b) Was ist jeweils die von Neumann-Entropie $S(\varrho_A) = -\operatorname{tr}_A(\varrho_A \log_2 \varrho_A)$ des *ersten* Teilsystems?

c) Ist einer der beiden Zustände verschränkt? Welchen der Zustände würden Sie in einem Experiment benutzen, um eine Verletzung der Bell-Ungleichung nachzuweisen?

Hinweise zu Teil a):
Bestimmen Sie zuerst die reduzierten Dichtematrizen $\varrho_A = \operatorname{tr}_B |\psi_1\rangle\langle\psi_1|$ und $\varrho_B = \operatorname{tr}_A |\psi_1\rangle\langle\psi_1|$. Diagonalisieren Sie ϱ_A und ϱ_B. Schreiben Sie $|\psi_1\rangle$ als Linearkombination der Eigenvektor-Produkte. Man kann das Ergebnis auch erraten!
Wiederholen Sie die Rechnung für $|\psi_2\rangle$. Hier auf Entartung achten! Alternativ: setzen Sie an $|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|x\rangle\,|y\rangle + |x_\perp\rangle\,|y_\perp\rangle\big)$ mit $|x\rangle = \alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle$ und $|x_\perp\rangle = \pm\beta^*\,|0\rangle \mp \alpha^*\,|1\rangle \perp |x\rangle$; analog für $|y\rangle$ und $|y_\perp\rangle$. Überprüfen Sie Ihre Resultate!

Aufgabe 5 *Dekohärenz auf der Blochkugel* (5 Punkte)

Gegeben sei ein Qubit A, welches an einen dreidimensionalen Hilbertraum $\mathcal{H}_E$ koppelt. Die Kraus-Operatoren für den sogenannten "Zwei-Pauli"-Kanal in $\mathcal{H}_A$ sind gegeben durch

$$M_0 = \sqrt{1-p}\,\mathbb{1} \quad , \qquad M_1 = \sqrt{\frac{p}{2}}\,\sigma_x \quad , \qquad M_2 = \sqrt{\frac{p}{2}}\,\sigma_z \quad , \qquad p \in [0,1] \ .$$

a) Bestätigen Sie, daß $\sum_\mu M_\mu^\dagger M_\mu = \mathbb{1}$. Wie lautet die unitäre Darstellung dieses Kanals in $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_E$? Geben Sie dazu seine Wirkung auf den Basis-Zuständen $|00\rangle \equiv |0\rangle_A |0\rangle_E$ und $|10\rangle \equiv |1\rangle_A |0\rangle_E$ an.

b) Berechnen Sie die Veränderung der Dichtematrix ϱ in $\mathcal{H}_A$ gemäß

$$\varrho' \ = \ \sum_\mu M_\mu\, \varrho\, M_\mu^\dagger \ .$$

Wie entwickelt sich damit der dreidimensionale Blochvektor $\vec{s}$ in der Parametrisierung $\varrho = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \vec{s}\cdot\vec{\sigma})$ unter der Wirkung des Zwei-Pauli-Kanals? Charakterisieren Sie die bewirkte Verformung der Blochkugel für $p < \frac{1}{2}$ und $p > \frac{1}{2}$.

Erinnerung: Die Pauli-Matrizen erfüllen $\sigma_i\,\sigma_j = \delta_{ij} + i\,\epsilon_{ijk}\,\sigma_k$. Explizit: $\sigma_x = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $\sigma_z = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$.

Aufgabe 6 *Polarisation eines relativistischen Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchens* (5 Punkte)

Die Wellenfunktion eines freien relativistischen Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchens mit Masse m, Energie $\omega > 0$ und Impuls k in z-Richtung sei gegeben durch

$$|\psi\rangle \ = \ \cos\alpha\,|+\rangle \ + \ \sin\alpha\,|-\rangle \ ,$$

d.h. eine Superposition aus Zuständen positiver und negativer Helizität ($\hbar$=c=1),

$$|+\rangle \ = \ \frac{1}{\sqrt{1+\eta^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \eta \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad |-\rangle \ = \ \frac{1}{\sqrt{1+\eta^2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ \eta \end{pmatrix} \quad , \quad \eta := \frac{\omega - m}{k} \ .$$

Berechnen Sie den Erwartungswert von $S_x = \mathbb{1} \otimes \frac{1}{2}\sigma_x$ im Zustand $|\psi\rangle$. Betrachten Sie dann den nichtrelativistischen ($k \ll m$) und schließlich den hochrelativistischen ($k \gg m$) Grenzfall: Ist jeweils eine Spinpolarisation senkrecht zur Ausbreitungsrichtung möglich, d.h. $\langle S_x \rangle = +\frac{1}{2}$ oder $-\frac{1}{2}$? Wenn ja, für welche Wahl von α?

Hinweise:
Explizit: $S_x = \frac{1}{2}\left(\begin{smallmatrix} 0&1&0&0 \\ 1&0&0&0 \\ 0&0&0&1 \\ 0&0&1&0 \end{smallmatrix}\right)$. Beachten Sie, daß $\omega^2 = m^2 + k^2$. Drücken Sie η durch k und m aus.

12 Punkte genügen zum Bestehen! *Don't panic!*