9. Präsenzübung zur Quantentheorie II, SS 2001

(zu bearbeiten am Donnerstag, 31.5.2001)

Probeklausur

Aufgabe K1 *Schmidtzerlegung*

a) Finden Sie die Schmidtzerlegung des Zustands

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}}\Big(|00\rangle + \sqrt{3}\,i\,|01\rangle + i\,|10\rangle + \sqrt{3}\,|11\rangle\Big) \ .$$

b) Betrachten Sie die folgende Messung an $|\psi\rangle$: das erste Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen werde durch einen Stern-Gerlach-Apparat geschickt, der in y-Richtung orientiert ist, das zweite durch einen in z-Richtung orientierten. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei beiden Apparaten das gleiche Meßergebnis zu finden, d.h. entweder bei beiden "Spin auf" oder bei beiden "Spin ab"?

Aufgabe K2 *Verschobener harmonischer Oszillator für Fermionen*

Gegeben sei der Hamiltonoperator $H = H_0 + V$ mit

$$H_0 = \hbar\omega a^\dagger a \quad , \quad V = \varphi(a + a^\dagger) \quad , \quad \varphi \in \mathbb{R} \ .$$

Hier seien $a^\dagger$ und a Erzeugungs- bzw. Vernichtungsoperatoren für Fermionen, d.h. es gelten $a\,|0\rangle = 0$ und $a^\dagger\,|0\rangle = |1\rangle$, sowie die Vertauschungsrelationen

$$\{a, a^\dagger\} = 1 \quad ; \quad \{a, a\} = \{a^\dagger, a^\dagger\} = 0 \ .$$

Bestimmen Sie die Energien und Eigenfunktionen zu H_0 und H.

Hinweis:
Setzen Sie die Eigenfunktionen zu H als Linearkombination der Eigenfunktionen zu H_0 an.

Aufgabe K3 *Entropie zusammengesetzter Systeme*

Verifizieren Sie die Subadditivität der von Neumann-Entropie für zusammengesetzte Quantensysteme, d.h.

$$S(\varrho) \leq S(\varrho_1) + S(\varrho_2) \ ,$$

sowie die Dreiecksungleichung

$$S(\varrho) \geq |S(\varrho_1) - S(\varrho_2)| \ ,$$

wobei $S(\varrho) = -\operatorname{tr}(\varrho \log \varrho)$, für das Beispiel zweier Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen im Singlettzustand.