5. Hausübung zur Quantentheorie II, SS 2007

(abzugeben bis Mittwoch, 16.05.2007, am ITP)

Aufgabe H13 *Kohärente Zustände für Fermionen* (4 Punkte)

Betrachten Sie kohärente Zustände für Fermionen: $|\xi\rangle = \exp(-\sum_i \xi_i b_i^\dagger)\,|0\rangle$. Hierbei sind die ξ_i Grassmann-Variablen.

a) Bestätigen Sie, daß $[\xi_i b_i^\dagger, \xi_j b_j^\dagger] = 0$. Zeigen Sie damit, daß der kohärente Zustand die folgende einfache Form besitzt:

$$|\xi\rangle \;=\; \prod_i (1 - \xi_i b_i^\dagger)\,|0\rangle \;.$$

b) Prüfen Sie, daß $|\xi\rangle$ tatsächlich ein kohärenter Zustand ist, d.h. daß $b_j\,|\xi\rangle = \xi_j\,|\xi\rangle$ gilt.

Hinweise: Es gelten die Antikommutatorrelationen $\{b_i, b_j\} = \{b_i^\dagger, b_j^\dagger\} = 0$ und $\{b_i, b_j^\dagger\} = \delta_{ij}$ sowie $\{\xi_i, \xi_j\} = 0$ und $\{\xi_i, b_j\} = \{\xi_i, b_j^\dagger\} = 0$.

Aufgabe H14 *Phononen* (6 Punkte)

Eine lineare Kette von N Massenpunkten (N sei gerade) mit harmonischer Kopplung hat den folgenden Hamilton-Operator:

$$H \;=\; \sum_{l=1}^{N}\left(\frac{1}{2m}p_l^2 + \frac{m\omega^2}{2}(q_l - q_{l+1})^2\right) \qquad \text{mit} \quad [q_l, p_{l'}] = \mathrm{i}\hbar\delta_{l,l'} \;.$$

Dabei sind $R_l = l \cdot a$ die Ruhelagen und q_l die Auslenkungen aus diesen.
Führen Sie neue Operatoren ein:

$$a_k \;=\; \tfrac{1}{\sqrt{N}}\sum_{l=1}^{N}(\alpha_k q_l + \mathrm{i}\beta_k p_l)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kR_l} \qquad \text{mit} \quad \alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R} \;,$$

wobei $k \in \{\pm\frac{\pi}{Na}, \pm\frac{3\pi}{Na}, \ldots, \pm\frac{(N-1)\pi}{Na}\}$. Das Intervall $[-\frac{\pi}{a}, +\frac{\pi}{a}]$ heißt Brillouin-Zone.
Zeigen Sie, daß $[a_k, a_{k'}] = [a_k^\dagger, a_{k'}^\dagger] = 0$. Bestimmen Sie α_k und β_k so, daß gilt

$$[a_k, a_{k'}^\dagger] \;=\; \delta_{k,k'} \qquad \text{und} \qquad H \;=\; \sum_k \hbar\omega_k(a_k^\dagger a_k + \tfrac{1}{2}) \;.$$

Geben Sie ω_k und die Energieeigenwerte von H an.

Hinweise:
Es gilt $\alpha_k = \alpha_{-k}$ und $\beta_k = \beta_{-k}$. Ferner gelten $\frac{1}{N}\sum_{l=1}^{N}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-k')R_l} = \delta_{k,k'}$ und $\frac{1}{N}\sum_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kR_l} = \delta_{l,0}$.
Zeigen Sie, daß $q_l = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_k \frac{1}{2\alpha_k}(a_k + a_{-k}^\dagger)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR_l}$ und $p_l = \frac{-i}{\sqrt{N}}\sum_k \frac{1}{2\beta_k}(a_k - a_{-k}^\dagger)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR_l}$.