1. Präsenzübung zur Quantentheorie II, SS 2007

(zu bearbeiten am Donnerstag, 12.04.2007)

Aufgabe P1 *Wiederholung: Zweidimensionaler harmonischer Oszillator*

Der zweidimensionale harmonische Oszillator besitzt den Hamiltonoperator

$$H \;=\; \hbar\omega(b_x^\dagger b_x + b_y^\dagger b_y + 1)$$

und die Eigenzustände $|n_x, n_y\rangle$ mit

$$b_x\,|n_x, n_y\rangle \;=\; \sqrt{n_x}\,|n_x{-}1, n_y\rangle \quad , \quad b_x^\dagger\,|n_x, n_y\rangle \;=\; \sqrt{n_x{+}1}\,|n_x{+}1, n_y\rangle \ ,$$

und entsprechend für $b_y, b_y^\dagger$. Hier sind

$$b_x \;=\; \sqrt{\tfrac{m\omega}{2\hbar}}x + \mathrm{i}\tfrac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}p_x \quad \text{und} \quad b_y \;=\; \sqrt{\tfrac{m\omega}{2\hbar}}y + \mathrm{i}\tfrac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}p_y \ .$$

Es gelten die Kommutatorrelationen

$$[b_x, b_x^\dagger] \;=\; 1 \;=\; [b_y, b_y^\dagger] \ ,$$

und alle Kommutatoren zwischen Auf- und Absteigern der x-Komponente und der y-Komponente verschwinden.

a) Zeigen Sie, daß $L_z = \mathrm{i}\hbar(b_x b_y^\dagger - b_x^\dagger b_y)$ und bestätigen Sie ferner, daß $[H, L_z] = 0$.

b) Berechnen Sie die Matrixelemente $\left\langle n_x', n_y' \middle| L_z \middle| n_x, n_y \right\rangle$.

Aufgabe P2 *Dichtematrix eines Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchens*

Die Dichtematrix ϱ eines Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchens kann mit den Pauli-Matrizen σ_i, $i = x, y, z$, und der Identität $\mathbb{1}$ entwickelt werden als

$$\varrho \;=\; a\,\mathbb{1} + b\,\vec{s}\cdot\vec{\sigma} \ .$$

a) Bestimmen Sie die Koeffizienten a und b aus der Bedingung $\operatorname{tr}\varrho = 1$, sowie der Forderung $|\vec{s}| = 1$ für einen reinen Zustand.

b) Was gilt für den Betrag des sogenannten Bloch-Vektors $\vec{s}$, falls ϱ gemischt ist?

c) Wie sind die Bloch-Vektoren $\vec{s}$ und $\vec{s}^{\perp}$ zweier reiner orthogonaler Zustände $|\psi\rangle$ und $|\psi^{\perp}\rangle$ relativ zueinander orientiert?

Erinnerung: Die Pauli-Matrizen erfüllen $\sigma_i\,\sigma_j \;=\; \delta_{ij} + \mathrm{i}\,\epsilon_{ijk}\,\sigma_k$.