

## 11. Präsenzübung zur Quantentheorie II, SS 2007

(zu bearbeiten am Donnerstag, 28.06.2007)

### Aufgabe P17 Diracgleichung mit kugelsymmetrischem Potential

Zeigen Sie, daß für ein Dirac-Teilchen in einem kugelsymmetrischem Potential  $V(r)$  die Größe  $\vec{L} + \frac{\hbar}{2}\vec{\Sigma}$  eine Konstante der Bewegung ist, nicht jedoch  $\vec{L}$  allein. Was bedeutet dies physikalisch?

Erinnerung:

$$\vec{L} = (\vec{r} \times \vec{p}) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} .$$

### Aufgabe P18 Zwei Eigenschaften der Diracgleichung

- a) Der Dirac-Spinor  $\psi$  erfülle die Diracgleichung (mit  $\hbar = c = 1$ )

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = 0 .$$

Zeigen Sie, daß jede der vier Komponenten  $\psi_i$  der Klein-Gordon-Gleichung

$$(\partial^\mu \partial_\mu + m^2) \psi_i = 0$$

genügt.

- b) Koppeln Sie das elektromagnetische Viererpotential  $A_\mu$  „minimal“ an die Diracgleichung mit der Ersetzungsvorschrift

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu ,$$

wobei  $q$  die elektrische Ladung des durch  $\psi$  beschriebenen Teilchens ist. Was bedeutet dies physikalisch?

- c) Zeigen Sie, daß die Diracgleichung invariant ist unter der Eichtransformation

$$\begin{aligned} A_\mu(x) &\rightarrow \hat{A}_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \lambda(x) \\ \psi(x) &\rightarrow \hat{\psi}(x) = e^{-iq\lambda(x)} \psi(x) . \end{aligned}$$