12. Präsenzübung zur Quantentheorie II, SS 2007

(zu bearbeiten am Donnerstag, 05.07.2007)

Aufgabe P19 *Relativistische Formulierung der Elektrodynamik*

Wiederholen Sie die relativistische Formulierung der Elektrodynamik: das Viererpotential ist definiert als $A^\mu = (\phi, \vec{A})$, der Viererstrom als $J^\mu = (\rho, \vec{j})$, und der Feldstärketensor als $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$.

a) Die Lagrange-Dichte ist gegeben durch

$$L = -\tfrac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - 4\pi J^\mu A_\mu \ .$$

Finden Sie mit Hilfe der Euler-Lagrange-Gleichungen die inhomogenen Maxwell-Gleichungen in der relativistischen Formulierung.

b) Berechnen Sie die Komponenten $F^{\mu\nu}$ sowie daraus durch geeignete Multiplikation mit dem metrischen Tensor $g_{\rho\sigma}$ die Komponenten $F_{\mu\nu}$.

c) Drücken Sie den Skalar $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ sowie den Pseudoskalar $\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}$ durch die Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ aus.

d) Ein Lorentz-Boost in x-Richtung transformiert Vierervektoren mit der Matrix

$$\Lambda^\rho{}_\mu = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{wobei} \qquad \beta = v \quad \text{und} \quad \gamma = (1-\beta^2)^{-1/2} \ .$$

Berechnen Sie das Transformationsverhalten der Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ aus der Tensor-Eigenschaft des Feldstärketensors, d.h.

$$F^{\rho\sigma} = \Lambda^\rho{}_\mu \Lambda^\sigma{}_\nu F'^{\mu\nu} \ .$$

Anmerkung: Hier und im folgenden gelte $c = 1$ und $\hbar = 1$.

b.w.

Aufgabe P20 *Darstellungen der Lorentzgruppe*

Die sechs Erzeugenden $J^{\alpha\beta} = -J^{\beta\alpha}$ der Lorentzgruppe erfüllen die Vertauschungsrelationen

$$[J^{\alpha\beta}, J^{\gamma\delta}] \;=\; \mathrm{i}(g^{\beta\gamma} J^{\alpha\delta} - g^{\alpha\gamma} J^{\beta\delta} - g^{\beta\delta} J^{\alpha\gamma} + g^{\alpha\delta} J^{\beta\gamma}) \qquad \text{mit} \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta = 0, 1, 2, 3 \; .$$

a) Man unterteilt die Erzeugenden in je drei Generatoren von Drehungen (L^i) und Boosts (K^i) gemäß

$$L^i \;=\; \tfrac{1}{2}\epsilon^{ijk} J^{jk} \quad \Leftrightarrow \quad J^{ij} \;=\; \epsilon^{ijk} L^k \qquad \text{und} \qquad K^i \;=\; J^{0i} \qquad \text{mit} \quad i = 1, 2, 3 \; ,$$

$$\text{also} \qquad L^1 = J^{23} \; , \quad L^2 = J^{31} \; , \quad L^3 = J^{12} \; , \quad K^1 = J^{01} \; , \quad K^2 = J^{02} \; , \quad K^3 = J^{03} \; .$$

Eine infinitesimale Lorentztransformation kann dann geschrieben werden als

$$\Phi \quad \mapsto \quad (\mathbb{1} \, - \, \mathrm{i}\, \vec{\theta} \cdot \vec{L} \, - \, \mathrm{i}\, \vec{\beta} \cdot \vec{K})\, \Phi \; .$$

Wir wissen bereits, daß $[L^i, L^j] = \mathrm{i}\epsilon^{ijk} L^k$. Bestimmen Sie die Kommutatorrelationen $[K^i, K^j]$ sowie $[L^i, K^j]$. Zeigen Sie, daß die komplexen Linearkombinationen

$$\vec{J}_{\mathrm{L}} \;=\; \tfrac{1}{2}(\vec{L} + \mathrm{i}\vec{K}) \qquad \text{und} \qquad \vec{J}_{\mathrm{R}} \;=\; \tfrac{1}{2}(\vec{L} - \mathrm{i}\vec{K})$$

zwei miteinander vertauschende Drehimpuls-Algebren bilden:

$$[J^i_{\mathrm{L}}, J^j_{\mathrm{L}}] \;=\; \mathrm{i}\epsilon^{ijk} J^k_{\mathrm{L}} \quad , \qquad [J^i_{\mathrm{R}}, J^j_{\mathrm{R}}] \;=\; \mathrm{i}\epsilon^{ijk} J^k_{\mathrm{R}} \quad , \qquad [J^i_{\mathrm{L}}, J^j_{\mathrm{R}}] \;=\; 0 \; .$$

b) Das Resultat von Teil a) bedeutet, daß jede endlich-dimensionale Darstellung der Lorentzgruppe durch ein Paar $(j_{\mathrm{L}}, j_{\mathrm{R}})$ von (ganz- oder halbzahligen) Spins festgelegt ist. In der Spin-$\frac{1}{2}$-Darstellung des Drehimpulses gilt $\vec{J} \doteq \vec{\sigma}/2$. Schreiben Sie damit explizit die Transformationen, die der $(\frac{1}{2}, 0)$ und der $(0, \frac{1}{2})$-Darstellung der Lorentzgruppe entsprechen. Sie erhalten die in der Vorlesung gezeigte Transformation der Weyl-Spinoren ψ_{L} und ψ_{R}.

Raten Sie, welche Objekte (Spinoren, Tensoren?) mit den Matrizen der Darstellungen $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ und $(1, 0)$ transformieren (Dimensionalität?). Was ist $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$?