2. Präsenzübung zur Quantentheorie II, SS 2007

(zu bearbeiten am Donnerstag, 19.04.2007)

Aufgabe P3 *Reine und gemischte Dichtematrizen*

a) Es sei eine Quelle gegeben, die Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen emittiert, die mit gleicher *Wahrscheinlichkeit* in positiver und negativer z-Richtung polarisiert sind. Wie lautet die zugehörige Dichtematrix ϱ_1? Eine andere Quelle emittiere Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen, die mit gleicher Wahrscheinlichkeit in positiver und negativer x-Richtung polarisiert sind. Was ist hier die Dichtematrix ϱ_2? Wie erkennen Sie an den Dichtematrizen, daß es sich um ein *statistisches Gemisch* handelt?

b) Eine weitere Quelle emittiere eine *Superposition*, die die gleiche *Amplitude* für Spin in positiver und negativer z-Richtung hat. Wie lautet hier die Dichtematrix, und wie erkennt man an ihr, daß es sich um einen reinen Zustand handelt? Betrachten Sie schließlich den Fall, daß eine Quelle eine Superposition emittiert, die die gleiche Amplitude für Spin in positiver und negativer x-Richtung hat.

   Wie groß ist in den vier Fällen jeweils die Wahrscheinlichkeit, bei einer Spinmessung in z-Richtung das Ergebnis $|\uparrow\rangle$ zu finden?

c) Betrachten Sie nun zwei aufeinanderfolgende Messungen. Die Emission finde in y-Richtung statt, und die Teilchen durchlaufen zunächst einen in z-Richtung orientierten Stern-Gerlach-Apparat, dann einen in x-Richtung orientierten. Es gibt daher vier mögliche Auftreffpunkte auf einer hinter der zweiten Messung angebrachten Detektorplatte. Geben Sie für die vier oben beschriebenen Quellen jeweils die Wahrscheinlichkeit für die verschiedenen Meßergebnisse an, d.h. die relativen Intensitäten der Flecken auf der Detektorplatte.

Aufgabe P4 *Wechselwirkungsbild*

Betrachten Sie die zeitabhängige Schrödingergleichung

$$(H_0 + V_t)\,|\psi(t)\rangle \;=\; \mathrm{i}\hbar\,\partial_t\,|\psi(t)\rangle \qquad \text{für} \;\; t > t_0 \;,$$

mit der Randbedingung $|\psi(t)\rangle = |\psi(t_0)\rangle$ für $t \leq t_0$. Hierbei werde V_t als Störung angesehen, die zum Zeitpunkt $t{=}t_0$ eingeschaltet wird. Zeigen Sie, daß sich nach Übergang ins Wechselwirkungsbild ("I" steht für "interaction"),

$$|\psi(t)\rangle = \exp(-\tfrac{\mathrm{i}}{\hbar}H_0(t{-}t_0))\,|\psi_I(t)\rangle \qquad \text{und} \qquad V_t = \exp(-\tfrac{\mathrm{i}}{\hbar}H_0(t{-}t_0))\;V_I(t)\;\exp(\tfrac{\mathrm{i}}{\hbar}H_0(t{-}t_0))\;,$$

die Zeitentwicklung des Zustands formal schreiben läßt als

$$|\psi_I(t)\rangle \;=\; \mathcal{T}\exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_{t_0}^{t} V_I(t')dt'\right)|\psi_I(t_0)\rangle \;\;.$$

Das Symbol $\mathcal{T}$ bezeichnet das zeitgeordnete Produkt.

Bemerkung: Für die auftretenden Zeitentwicklungsoperatoren ist auch die folgende Notation gebräuchlich: $U_0(t,t_0) = \exp(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}H_0(t{-}t_0))$, so daß $V_t = U_0(t,t_0)V_I(t)U_0^\dagger(t,t_0)$ ist. Die vollständige Zeitentwicklung ist dann gegeben durch $|\psi(t)\rangle = U_0(t,t_0)\,|\psi_I(t)\rangle = U_0(t,t_0)W(t,t_0)\,|\psi(t_0)\rangle$, wobei $W(t,t_0) = \mathcal{T}\exp(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_{t_0}^{t} U_0^\dagger(t',t_0)V_{t'}\,U_0(t',t_0)dt')$ die Zeitentwicklung für Zustände im Wechselwirkungsbild beschreibt. Für ein zeitunabhängiges V reduziert sich $W(t,t_0)$ auf $\exp(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}V(t{-}t_0))$.