7. Präsenzübung zur Quantentheorie II, SS 2007

(zu bearbeiten am Donnerstag, 24.05.2007)

Aufgabe P11 *Die CHSH-Ungleichung*

Leiten Sie eine zur Bell-Ungleichung analoge Ungleichung für vier mögliche Meßrichtungen her, die sogenannte CHSH-Ungleichung (benannt nach Clauser, Horne, Shimony und Holt): gegeben seien Observable A, B, C, D, deren Meßwerte a, b, c, d jeweils $+1$ oder -1 sein können.

a) Machen Sie sich klar, daß

$$(a+c)\,b-(a-c)\,d \;=\; \pm 2\;,$$

und daß daher für die Erwartungswerte der Observablen die CHSH-Ungleichung

$$|\langle AB\rangle+\langle BC\rangle+\langle CD\rangle-\langle DA\rangle| \;\leq\; 2$$

gilt.

b) Betrachten Sie nun einen quantenmechanischen Singlettzustand. Die Observablen von Beobachter 1 seien $A=\vec{\alpha}\cdot\vec{\sigma}_1$ und $C=\vec{\gamma}\cdot\vec{\sigma}_1$ (Spinmessung in Richtung der Einheitsvektoren $\vec{\alpha}$ bzw. $\vec{\gamma}$); für Beobachter 2 lauten die entsprechenden Observablen B und D (Spinmessung in Richtung $\vec{\beta}$ bzw. $\vec{\delta}$).

Berechnen Sie die linke Seite der Ungleichung für den Singlettzustand. Erinnerung: $\langle AB\rangle=-\cos\Theta(\alpha,\beta)$. Überlegen Sie sich Winkel, bei denen die Ungleichung verletzt wird. Diskutieren Sie den physikalischen Grund für die Verletzung.

c) Zeigen Sie, daß eine *lineare* Korrelation $\langle AB\rangle = 1-2\,\Theta(\alpha,\beta)/\pi$ sowohl die Bell-Ungleichung als auch die CHSH-Ungleichung erfüllt.

Aufgabe P12 *Quantennatur von Drei-Teilchen-Korrelationen*

Gegeben sei ein System von drei Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen in dem Zustand

$$|\psi\rangle \;=\; \tfrac{1}{\sqrt{2}}\Big(|\!\uparrow\uparrow\uparrow\rangle-|\!\downarrow\downarrow\downarrow\rangle\Big)\;,$$

ein sogenannter GHZ-Zustand (benannt nach Greenberger, Horne und Zeilinger).

a) Zeigen Sie, daß $|\psi\rangle$ ein Eigenvektor zu den Operatoren $\sigma_{1x}\sigma_{2y}\sigma_{3y}$, $\sigma_{1y}\sigma_{2x}\sigma_{3y}$, $\sigma_{1y}\sigma_{2y}\sigma_{3x}$ sowie $\sigma_{1x}\sigma_{2x}\sigma_{3x}$ ist. (Der erste Index einer Pauli-Matrix bezieht sich auf die Nummer des Teilchens, der zweite auf die Art der Pauli-Matrix.) Was ist jeweils der Eigenwert? Zeigen Sie, daß diese vier Operatoren kommutieren.

b) Es werden nun Spin-Messungen an den drei Teilchen im Zustand $|\psi\rangle$ durchgeführt. Das Ergebnis einer Spin-Messung des $i$ten Teilchens in x-Richtung (d.h. der Eigenwert von σ_{ix}) kann $+1$ oder -1 sein und sei mit m_{ix} bezeichnet. Welchen Wert hat $m_{1x}m_{2x}m_{3x}$ nach Teil (a)? Jedem der Operatoren σ_{ix} mit $i=1,2,3$ entspricht ein „Element der Realität“, da sein Wert *mit Sicherheit* aus der Messung von σ_x an den zwei anderen Teilchen vorgesagt werden kann.

c) Betrachten Sie nun die anderen drei in Teil a) angegebenen Kombinationen von Messungen und leiten Sie einen Widerspruch her zu der Annahme, daß $m_{i\nu}$ in beiden Meßkombinationen, in denen es vorkommt, den gleichen Wert annimmt. Damit haben Sie (wie schon Mermin 1990) gezeigt, daß die Korrelation von $|\psi\rangle$ quantenmechanischer Natur ist.