

## 9. Präsenzübung zur Quantentheorie II, SS 2007

(zu bearbeiten am Donnerstag, 14.06.2007)

### Probeklausur

#### Aufgabe K1 *Schmidtzerlegung*

- a) Wie üblich seien  $|0\rangle$  und  $|1\rangle$  die Eigenzustände von  $\sigma_z$ . Finden Sie für zwei (unterscheidbare) Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen die Schmidtzerlegung des Zustands

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}} (|00\rangle + \sqrt{3}i|01\rangle + i|10\rangle + \sqrt{3}|11\rangle).$$

- b) Betrachten Sie die folgende Messung an  $|\psi\rangle$ : das erste Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen werde durch einen Stern-Gerlach-Apparat geschickt, der in  $y$ -Richtung orientiert ist, das zweite durch einen in  $z$ -Richtung orientierten. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei beiden Apparaten das gleiche Meßergebnis zu finden, d.h. entweder bei beiden „Spin auf“ oder bei beiden „Spin ab“?

#### Aufgabe K2 *Versobener harmonischer Oszillator für Fermionen*

Gegeben sei der Hamiltonoperator  $H = H_0 + V$  mit

$$H_0 = \hbar\omega b^\dagger b \quad \text{und} \quad V = \varphi(b+b^\dagger) \quad \text{wobei} \quad \varphi \in \mathbb{R}.$$

Hier seien  $b^\dagger$  und  $b$  ein fermionischer Erzeugungs- bzw. Vernichtungsoperator, d.h. es gelten  $b|0\rangle = 0$  und  $b^\dagger|0\rangle = |1\rangle$  sowie die Vertauschungsrelationen

$$\{b, b^\dagger\} = \mathbf{1} \quad \text{und} \quad \{b, b\} = \{b^\dagger, b^\dagger\} = 0.$$

Bestimmen Sie die Energien und Eigenfunktionen zu  $H_0$  und  $H$ .

*Hinweis:*

Setzen Sie die Eigenfunktionen zu  $H$  als Linearkombination der Eigenfunktionen zu  $H_0$  an.

#### Aufgabe K3 *Entropie zusammengesetzter Systeme*

Verifizieren Sie die Subadditivität der von Neumann-Entropie  $S(\varrho) = -\text{tr}(\varrho \ln \varrho)$  für zusammengesetzte Quantensysteme, d.h.

$$S(\varrho) \leq S(\varrho_1) + S(\varrho_2),$$

sowie die Dreiecksungleichung

$$S(\varrho) \geq |S(\varrho_1) - S(\varrho_2)|$$

jeweils für das Beispiel zweier Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen im Singlettzustand. Hierbei sind  $\varrho_1$  und  $\varrho_2$  die reduzierten Dichteoperatoren.