1. Hausübung zur Fortgeschrittenen Quantentheorie, SS 2010

(abzugeben am Dienstag, 20.04.2010)

Aufgabe H1 *Drehimpuls eines Teilchens im kugelsymmetrischen Potential* (5 Punkte)

Die (nicht normierte) Wellenfunktion eines Teilchens, das sich in einem kugelsymmetrischen Potential befindet, sei gegeben durch

$$\psi(\vec{r}) = (x + y + 3z)\, f(r) \ , \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \ .$$

a) Zeigen Sie, dass $\psi(\vec{r})$ Eigenfunktion zum Quadrat $\vec{L}^2$ des Drehimpulses ist, und bestimmen Sie den Wert von ℓ in
$$\vec{L}^2\, \psi(\vec{r}) = \hbar^2 \ell(\ell{+}1)\, \psi(\vec{r}) \ .$$

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit W_m treten die Eigenwerte $\hbar m$ (wobei $-\ell \leq m \leq +\ell$) der z-Komponente L_z des Drehimpulses in $\psi(\vec{r})$ auf?

c) Bestimmen Sie Mittelwert und Schwankung von L_z im Zustand $|\psi\rangle$, d.h.

$$\langle L_z \rangle = \langle \psi |\, L_z \,| \psi \rangle \,/\, \langle \psi |\, \psi \rangle \qquad \text{und} \qquad (\Delta L_z)^2 = \langle \psi |\, L_z^2 - \langle L_z \rangle^2 \,| \psi \rangle \,/\, \langle \psi |\, \psi \rangle \ .$$

Hinweise: Stellen Sie die Wellenfunktion $\psi(\vec{r})$ in Polarkoordinaten dar und drücken Sie sie durch die Kugelflächenfunktionen Y_ℓ^m aus. Zwischenresultat: $W_0 = 9/11$, $W_{\pm 1} = 1/11$. Verwendung der in b) bestimmten Wahrscheinlichkeiten W_m erspart längere Rechnung in c).

Aufgabe H2 *Aufeinanderfolgende Messungen* (5 Punkte)

Betrachten Sie zwei aufeinanderfolgende Messungen an einem in y-Richtung fliegenden Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen. Die eine Messung sei ein Stern-Gerlach-Apparat in z-Richtung, die andere ein um den Winkel θ in der zx-Ebene rotierter Stern-Gerlach-Apparat. Die Basis sei durch die z-Richtung festgelegt und mit $\{|\uparrow\rangle\,, |\downarrow\rangle\}$ bezeichnet.

a) Wie lautet der Projektor $P_\nearrow$ für den "Spin-auf-Zustand" $|\nearrow\rangle$ des rotierten Apparats? Kommutieren $P_\uparrow$ (der Projektor auf $|\uparrow\rangle$) und $P_\nearrow$?

b) Es liege ein reiner Zustand vor,

$$|\psi\rangle = \alpha\, |\uparrow\rangle + \beta\, |\downarrow\rangle \qquad \text{mit } |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \ .$$

Wie groß ist die kombinierte Wahrscheinlichkeit $W_{\uparrow,\nearrow}$, bei der z-Messung den Zustand $|\uparrow\rangle$ und bei der darauffolgenden "rotierten" Messung $|\nearrow\rangle$ zu finden (d.h. bei beiden Messungen "Spin auf")? Was gilt dagegen für die umgekehrte Reihenfolge, also wie groß ist $W_{\nearrow,\uparrow}$ für den Zustand $|\psi\rangle$?

c) Wie groß sind $W_{\uparrow,\nearrow}$ und $W_{\nearrow,\uparrow}$, falls sich das System in dem gemischten Zustand

$$\varrho \ = \ |\alpha|^2 \cdot |\uparrow\rangle\, \langle\uparrow| \ + \ |\beta|^2 \cdot |\downarrow\rangle\, \langle\downarrow| \qquad \text{mit } |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \qquad \text{befindet?}$$

Hinweis: Verwenden Sie zur Bestimmung von $P_\nearrow$ entweder die in Aufgabe P1 besprochene Darstellung für reine Zustände, oder die Tatsache, dass eine Drehung um die y-Achse auf die Spinoren vermöge der Matrix $\exp[\mathrm{i}\theta\sigma_y/2]$ wirkt. Die Koeffizienten α und β sind komplex.

b.w.

Aufgabe H3 *Messungen an Spin-1-Teilchen* (5 Punkte)

Eine Quelle emittiere in y-Richtung ein statistisches Gemisch von Spin-1-Teilchen, die jeweils mit der Wahrscheinlichkeit 1/3 im Zustand $|0\rangle$ und in den Zuständen $|\pm 1\rangle$ sind (diese Basis bezieht sich auf die z-Richtung). Die Teilchen passieren zwei Stern-Gerlach-Apparate: der erste sei in x-Richtung orientiert, der zweite in z-Richtung. Dahinter sei eine Detektorplatte angebracht, auf der man die 9 möglichen Signale mit den Intensitäten $I_{m\mu}$ beobachtet. Der Index m bezeichnet das Resultat der ersten, μ das der zweiten Messung. Geben Sie die Wahrscheinlichkeiten $W_{m\mu} = I_{m\mu}/I_m$ an, wobei $I_m = \sum_\mu I_{m\mu}$. Welcher der 9 Flecken verschwindet für exakt orthogonale Orientierung der Apparate?

Hinweise: Die Drehimpulsmatrizen für $S = 1$ sind:

$$S_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad S_y = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ \mathrm{i} & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad S_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad .$$

Eine Drehung um die y-Achse wirkt auf die Spinoren vermöge der Matrix $\exp[\mathrm{i}\theta S_y]$.