3. Präsenzübung zur Fortgeschrittenen Quantentheorie, SS 2010

(zu bearbeiten am Dienstag, 11.05.2010)

Aufgabe P5 *Hamilton-Operator im Fock-Raum*

Ausgedrückt durch das Quantenfeld Ψ hat der Viel-Teilchen-Hamiltonoperator die Form

$$H = \int \mathrm{d}^3r \; \Psi^\dagger(\vec{r}) \; h(\vec{r},\nabla) \; \Psi(\vec{r}) \quad , \qquad \text{wobei} \quad h(\vec{r},\nabla) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\vec{r})$$

der Ein-Teilchen-Hamiltonoperator ist. Laut Vorlesung gilt $\Psi(\vec{r}) = \sum_\mu u_\mu(\vec{r})\, a_\mu$. Stellen Sie H durch Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren dar. Bei welcher Wahl des Funktionensystems $u_\mu(\vec{r})$ ist H diagonal? Interpretieren Sie das Ergebnis.

Im Heisenberg-Bild sind die Quantenfelder $\Psi(\vec{r},t)$ zeitabhängig und erfüllen somit die Bewegungsgleichung

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Psi(\vec{r},t) = [\Psi(\vec{r},t)\,,H]\;.$$

Integrieren Sie dies formal, d.h. drücken Sie $\Psi(\vec{r},t)$ durch $\Psi(\vec{r}) \equiv \Psi(\vec{r},0)$ aus. Setzen Sie das Ergebnis in der rechten Seite dieser Gleichung ein und verwenden Sie obiges H, um zu zeigen, dass $\Psi(\vec{r},t)$ sowohl für den Fermion- als auch für den Boson-Fall der Ein-Teilchen-Schrödingergleichung genügt.

Aufgabe P6 *Kraus-Darstellung eines Superoperators*

Die Kraus-Operatoren für die sogenannte Amplituden-Dämpfung (Modell für den Zerfall eines angeregten Zwei-Niveau-Atoms durch spontane Emission von Photonen) sind gegeben durch

$$M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-p} \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad M_1 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{p} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \;,$$

wobei der Grundzustand $|0\rangle_A \doteq \binom{1}{0}$ und der angeregte Zustand $|1\rangle_A \doteq \binom{0}{1}$ ist.

a) Bestätigen Sie, dass $\sum_\mu M_\mu^\dagger M_\mu = \mathbb{1}$. Wie entwickelt sich ein allgemeiner Zustand ϱ_A? Prüfen Sie die Spurerhaltung und die Erhaltung der Hermitezität.

b) Wie lautet die unitäre Darstellung der Amplituden-Dämpfung in $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_E$, d.h. in dem Hilbert-Raum, der durch Atom und Umgebung aufgespannt wird? Überlegen Sie sich die physikalische Interpretation.