5. Präsenzübung zur Fortgeschrittenen Quantentheorie, SS 2010

(zu bearbeiten am Dienstag, 15.06.2010)

Aufgabe P9 *Die CHSH-Ungleichung*

Leiten Sie eine zur Bell-Ungleichung analoge Ungleichung für vier mögliche Messrichtungen her, die sogenannte CHSH-Ungleichung (nach Clauser, Horne, Shimony und Holt): gegeben seien Observable A, B, C, D, deren Messwerte a, b, c, d jeweils $+1$ oder -1 sein können.

a) Machen Sie sich klar, dass bei gleichzeitigem Vorliegen der vier Messwerte gilt

$$(a+c)\,b-(a-c)\,d \;=\; \pm 2$$

und daher für die Erwartungswerte der Observablen die CHSH-Ungleichung

$$|\langle AB\rangle+\langle BC\rangle+\langle CD\rangle-\langle DA\rangle| \;\leq\; 2\;.$$

b) Betrachten Sie nun einen quantenmechanischen Singlettzustand. Die Observablen von Beobachter 1 seien $A=\vec{\alpha}\cdot\vec{\sigma}_1$ und $C=\vec{\gamma}\cdot\vec{\sigma}_1$ (Spinmessung in Richtung der Einheitsvektoren $\vec{\alpha}$ bzw. $\vec{\gamma}$); für Beobachter 2 lauten die entsprechenden Observablen B und D (Spinmessung in Richtung $\vec{\beta}$ bzw. $\vec{\delta}$).

Berechnen Sie die linke Seite der Ungleichung für den Singlettzustand. Erinnerung: $\langle AB\rangle=-\cos\Theta(\alpha,\beta)$. Überlegen Sie sich Winkel, bei denen die Ungleichung verletzt wird. Diskutieren Sie den physikalischen Grund für die Verletzung.

c) Zeigen Sie, dass eine *lineare* Korrelation $\langle AB\rangle = 1-\frac{2}{\pi}\,\Theta(\alpha,\beta)$ die Ungleichung erfüllt.

Aufgabe P10 *Zwei Eigenschaften der Diracgleichung*

a) Der Dirac-Spinor ψ erfülle die Diracgleichung (mit $\hbar=c=1$)

$$(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu-m)\,\psi \;=\; 0\;.$$

Zeigen Sie, dass jede der vier Komponenten ψ_i der Klein-Gordon-Gleichung genügt,

$$(\partial^\mu\partial_\mu+m^2)\,\psi_i \;=\; 0\;.$$

b) Koppeln Sie das elektromagnetische Viererpotential A_μ „minimal“ an die Diracgleichung mit der Ersetzungsvorschrift

$$\partial_\mu \quad\rightarrow\quad D_\mu \;=\; \partial_\mu+\mathrm{i}qA_\mu\;,$$

wobei q die elektrische Ladung des durch ψ beschriebenen Teilchens ist. Was bedeutet dies physikalisch?

c) Zeigen Sie, dass die Diracgleichung invariant ist unter der Eichtransformation

$$A_\mu(x) \;\rightarrow\; \hat{A}_\mu(x) \;=\; A_\mu(x)+\partial_\mu\lambda(x)\;,$$

$$\psi(x) \;\rightarrow\; \hat{\psi}(x) \;=\; \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\lambda(x)}\,\psi(x)\;.$$