Präsenzübung zu den Rechenmethoden der Physik

7. 4. 2000 SS 2000

1. Krummlinige Koordinaten

Sei eine Parametrisierung $\vec{r} \doteq \vec{r}(u, v)$ vorgelegt. Welchen Ausdruck bekommen Sie für das Differential $d\vec{r}(u, v)$? Geben Sie mithilfe der Formeln aus der Vorlesung einen Ausdruck für das Quadrat des Linienelements $(ds)^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r}$ an. Mit welcher Matrix g können Sie

$$(ds)^2 = \begin{pmatrix} du & dv \end{pmatrix} \; g \; \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$$

schreiben? Anmerkung: g wird als Metrik bezeichnet.

2. Beispiele

Betrachten Sie die folgenden Beispiele und skizzieren Sie jeweils die Kurvenscharen $r(u, v_0)$ und $r(u_0, v)$ mit festem v_0 bzw. u_0. Welche Einheitsvektoren $\vec{e}_u = \partial_u \vec{r}/|\partial_u \vec{r}|$ und $\vec{e}_v = \partial_v \vec{r}/|\partial_v \vec{r}|$ erhalten Sie? Bilden diese ein Orthogonalsystem? Bestimmen Sie jeweils die Metrik g und berechnen Sie die Linienelemente $ds = \sqrt{(ds)^2}$ sowie die Flächenelemente d^2r gemäß $d^2r = \sqrt{\det g}\, du\, dv$. (Dies wird in der Vorlesung bewiesen werden.)

(a) *Parallelogramm-Koordinaten*. $\vec{r}(u, v) \doteq u\vec{r}_1 + v\vec{r}_2$, $\vec{r}_1 \nparallel \vec{r}_2$. Vergleichen Sie $\sqrt{\det g}$ mit der bekannten Formel $|\vec{r}_1 \times \vec{r}_2|$ für den Flächeninhalt eines Parallelogramms.

(b) *Polarkoordinaten*. $(u, v) \equiv (r, \varphi)$ mit $\vec{r}(r, \varphi) \doteq \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}$.

(c) *Parabolische Koordinaten*. $\vec{r}(u, v) \doteq \begin{pmatrix} uv \\ (v^2 - u^2)/2 \end{pmatrix}$.