Präsenzübung zu den Rechenmethoden der Physik

5. 4. 2000 SS 2000

1. Die exakte Differentialgleichung

Es sei eine Differentialgleichung in der Form

$$P(x,y) + Q(x,y)\,y' = 0$$

vorgelegt. Ist die linke Seite, geschrieben als $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$, möglicherweise ein totales Differential $dF = \partial_x F\,dx + \partial_y F\,dy$ einer Funktion $F(x,y)$, d. h. $P = \partial_x F$ und $Q = \partial_y F$? Sollte dies der Fall sein, so müsste sicherlich, die Vertauschbarkeit von Ableitungen vorausgesetzt,

$$\partial_y P = \partial_y \partial_x F = \partial_x \partial_y F = \partial_x Q$$

gelten.
Ist diese Bedingung erfüllt, so berechnet man zunächst $F(x,y) = \int^x dx'\,P(x',y) + \varphi(y)$. Beachte, dass die auftretende Integrations„konstante" φ im Allgemeinen noch von der Variablen y abhängt. Damit folgt aus $Q = \partial_y F$ weiter

$$\frac{d}{dy}\varphi(y) = Q(x,y) - \partial_y \int^x dx'\,P(x',y),$$

woraus sich nun $\varphi(y)$ ergibt.
Erproben Sie diese Technik an folgenden Beispielen. Prüfen Sie zunächst die Exaktheit.

$$(12xy+3)dx + 6x^2 dy = 0, \quad y(1) = 0$$
$$(2xe^y - 1)dx + (x^2 e^y + 1)dy = 0, \quad y(1) = 0$$

Vergleichen Sie die Lösungsmethode zur exakten Differentialgleichung mit dem aus dem Wintersemester bekannten Verfahren zur Bestimmung des Potentiales eines Vektorfeldes.

2. Der integrierende Faktor

Ist das Kriterium der Exaktheit nicht erfüllt, so steht man dennoch nicht auf verlorenem Posten. Durch Multiplikation mit einem (nirgends verschwindendem) *integrierenden Faktor** $M(x,y)$ kann man versuchen, die Exaktheit zu erreichen

$$M(x,y)\,P(x,y)\,dx + M(x,y)\,Q(x,y)\,dy = 0.$$

An $M(x,y)$ ist somit die Forderung zu stellen

$$\frac{\partial}{\partial y}(MP) = \frac{\partial}{\partial x}(MQ).$$

Hierbei handelt es sich um eine *partielle* Differentialgleichung. Obwohl man damit anscheinend die Schwierigkeiten noch erhöht hat, kann der Ansatz hilfreich sein, weil man nicht die allgemeine Lösung benötigt, sondern nur eine spezielle, möglicherweise von einer besonders einfachen Gestalt. Beispiele für *einfache* Funktionen M sind solche, die entweder nur von einer Variablen x oder y abhängen oder nur von speziellen Kombinationen, etwa xy oder $x+y$.
Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung

$$4x + 3y^2 + 2xyy' = 0$$

nicht exakt ist, und versuchen Sie einen Ansatz der Form $M(x)$ für den integrierenden Faktor.

*Der integrierende Faktor heißt zuweilen auch *Eulerscher Multiplikator*.