40) Noch ein Integral

Das Integral $J = \int_0^\infty dx\; x\, e^{-\alpha x}$ soll auf folgende vier Weisen ausgerechnet werden:

(a) via $\partial_x(\alpha\, x\, e^{-\alpha x}) = ?$ und $\partial_x\, e^{-\alpha x} = ?$ $\longrightarrow$ Stammfunktion

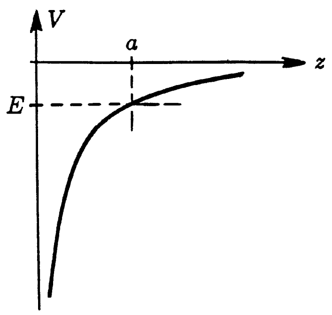
(b) aus $K(\alpha) := \int_0^\infty dx\, e^{-\alpha x}$ und Differenzieren nach α

(c) aus $K(\alpha)$ mittels partieller Integration

(d) über $J = \lim_{\beta\to 0} \int_0^\infty dx\, \frac{1}{\beta} \sin(\beta x)\, e^{-\alpha x}$ und die Euler-Formel 3

41) Absturz

Ein Kometenschwarm hat die Erde sehr rasch bis zum Stillstand abgebremst: $z(0) = a$, $\dot{z}(0) = 0$. Wieviel Tage bleiben uns noch bis zum Untergang in der Sonne?



$a = 1,5 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}$,

$M_{\mathrm{Sonne}} = 2 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$,

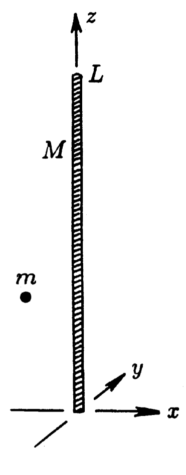
$\gamma = 6,7 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3/s^2\,kg}$

3

42) A rod in the sky

Am 01.04.1999 wurde erstmals ein stabförmiger Himmelskörper entdeckt. Er erstreckt sich auf der z–Achse von 0 bis L, ist als ∞ dünn idealisierbar und hat konstante lineare Massendichte $\sigma(z) =: \sigma_0 = M/L$. Welches Potential $V(\vec{r}\,)$ durchfliegt sein Trabant (m)?

Nach expliziter Berechnung von $V(\vec{r}\,)$ interessieren wir uns für den Grenzfall eines nach oben hin sehr langen Stabes ($L \to \infty$), während die m–Koordinaten z und $\sqrt{x^2+y^2} =: \varrho$ im Endlichen bleiben. Da der führende V–Term ($:= V_0$) nicht von $\vec{r}$ abhängt, dürfen wir ihn subtrahieren. Wir erhalten ein nur noch von $\sqrt{\varrho^2+z^2}-z$, aber nicht mehr von L abhängendes Potential.



Längs welcher Kurven in der zx–Ebene hat das Potential den gleichen Wert? Skizze!

Wie nimmt es zu, wenn man sich bei fester Höhe $z > 0$ dem Stab nähert ($\varrho \to 0$) ?

Das gilt natürlich nicht mehr für negative z–Werte, sondern statt dessen ... ?

Zusatzpunkt:
Schließlich entfernen wir uns genau auf der z–Achse nach unten vom Stabende: $V(z) \to ?$ Welche V–Asymptotik bei $\varrho = 0$, $z \to -\infty$ hat hingegen plausiblerweise ein Stab endlicher Länge?

Hinweise: Ist eine Funktion konstant, so muß es bereits ihr Argument sein, nicht wahr?!
So gibt denn const $\stackrel{!}{=} \gamma m \sigma_0 \ln(\sqrt{z^2+\varrho^2} - z)$ Paraboloide als Äquipotentialflächen.
$V(\varrho \to 0, z > 0) \to 2\gamma m \sigma_0 \ln(\varrho) + O(1)$, ... Letzte Frage: $-\gamma m M/|z|$ 6+1