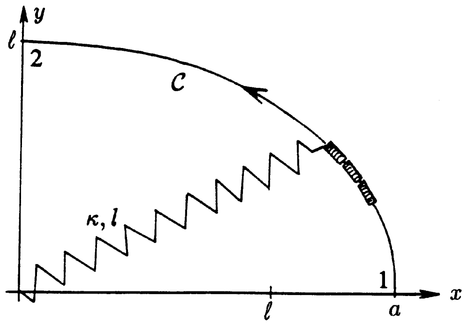
43) Nahverkehr

Mit billigem Nachtstrom wird eine Feder (κ, ℓ) auf Länge a gedehnt. Am Morgen zieht sie dann einen Nahverkehrszug auf der skizzierten elliptischen Schiene $\mathcal{C}$ von Punkt 1 auf Punkt 2. Die dabei verrichtete Arbeit soll explizit als Kurvenintegral ausgewertet werden.



Die Substitution $r(t) = u$ erledigt das Integral.
Das Ergebnis ist wegen Energieerhaltung klar: $A = \frac{1}{2}\,\kappa\,(a-\ell)^2$.

4

44) Wellblech

Ein Hüttendach mit welliger Höhe $h(x,y) = h_0 + d\,\cos(2\pi n x/L)$ über einer Grundfläche $(x,y) \in [0,L] \times [0,L]$ wird von der Sonne bestrahlt. Der aus $(-1,1,1)$ kommende Photonenstrom wird noch durch eine Wolke ortsabhängig abgeschwächt, so daß die Energiestromdichte $\vec{\jmath}\,(\vec{r}\,)$ (= Energiefluß pro Zeit und Fläche) am Ort $\vec{r} \doteq (x,y,z)$ die folgende Form hat:

$$\vec{\jmath}\,(\vec{r}\,) \;\doteq\; \left(\alpha\frac{z}{h_0} - \beta\frac{x}{L}\right)\begin{pmatrix} +1 \\ +1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \quad \alpha, \beta > 0 \quad .$$

Mit wieviel Energie pro Zeit (Leistung) $P = -\int d\vec{f}\cdot\vec{\jmath}$ wird das Dach $\vec{r} \doteq (x, y, h(x,y))$ (bei 100%iger Absorption) aufgeheizt?

Man schreibe das Flächenintegral in der Form $P = -\int dxdy\,(\partial_x\vec{r} \times \partial_y\vec{r}\,)\cdot\vec{\jmath}\,(\vec{r}\,(x,y))$.
Ein Integral der Form $\int_0^L dx\,x\,\sin kx$ attackiere man mit partieller Integration.
Ergebnis: $P = (\alpha - \frac{\beta}{2})L^2 - \beta\,d\,L$.

4

45) Trägheitstensor

Man berechne für einen Quader mit den Kantenlängen a, b und c und konstanter Massendichte $\rho(\vec{r}\,) = \rho_0$ die Komponenten

$$I_{jk} \;=\; \int_V d^3r\;\;\rho(\vec{r}\,)\,(\vec{r}^{\,2}\,\delta_{jk} \;-\; x_j x_k) \;=\; \int_V d^3r\;\;\rho(\vec{r}\,)\;\begin{pmatrix} y^2{+}z^2 & -xy & -xz \\ -yx & z^2{+}x^2 & -yz \\ -zx & -zy & x^2{+}y^2 \end{pmatrix}_{jk}$$

des Trägheitstensors in Koordinaten längs der Quader-Achsen, und zwar

a) bezüglich einer Ecke des Quaders, also $V = [0,a] \times [0,b] \times [0,c]$.

b) bezüglich des Quader-Schwerpunkts, also $V = [-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}] \times [-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}] \times [-\frac{c}{2}, \frac{c}{2}]$.

c) Die Differenz der beiden Tensoren aus (a) und (b) läßt sich in der Form $M(\,\vec{d}^{\,2}\,\delta_{jk} - d_j d_k)$ schreiben; für welche Masse M und welchen Vektor $\vec{d}$?

4

Der Tensor in (b) sollte Diagonalgestalt haben. Das Resultat (c) ist ein Beispiel des „Satz von Steiner" .

♣ ♣ ♣ Dies ist das letzte Ü–Blatt im WS und gedacht zum ersten Punkte-Sammeln für das SS. Aber auch die Entzugserscheinungen werden ein Ende haben : Montag, 03. April, 11^{ct} im Bahlsen–Saal. ♣ ♣ ♣