17. Hausübung zu den Rechenmethoden der Physik SS 2000

Abgabe am 17. 4. 2000 vor der Vorlesung

49. Bergwanderung

Ein Wanderer befindet sich am Fuße eines Berges, der sich über der xy-Ebene erhebt und dessen Höhe z durch $z(x,y) = \frac{h}{\rho_0^2}(\rho_0^2 - x^2 - y^2)$ gegeben ist. Es ist zweckmäßig, die Bergfläche durch Polarkoordinaten der xy-Ebene zu parametrisieren, d. h. $\vec{r} \doteq (x(\rho,\ \varphi),\ y(\rho,\varphi), z(\rho,\varphi))$. Um die Strapazen des Aufstiegs möglichst gering zu halten, möchte der Wanderer den Pfad zum Gipfel so wählen, dass er mit konstantem Höhenzuwachs α pro Schrittlänge verläuft. Wie ist der Pfad zu wählen?

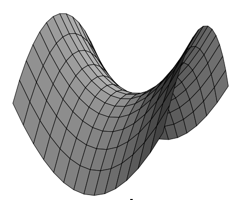
(a) Setzen Sie die Koordinaten (ρ,φ) als Funktion der Weglänge s, beginnend mit $s = 0$, an und drücken Sie damit die Bedingung der konstanten Steigrate aus. Lösen Sie die resultierende Gleichung für die Radialkoordinate $\rho = \rho(s)$.

(b) Sie erhalten nun die Abhängigkeit des Winkels φ von der Bogenlänge s, indem Sie die Tatsache benutzen, daß eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve mit konstanter Geschwindigkeit $(\frac{d\vec{r}}{ds})^2 = 1$ durchlaufen wird. Es genügt, eine Gleichung für $\frac{d\varphi}{ds}(s)$ anzugeben. Diese Gleichung hat zwei Lösungen. Können Sie die Ursache dafür erkennen?

(c) Die Bedingung der konstanten Steigrate lässt sich ab einem bestimmten $\rho_1 < \rho_0$ nicht mehr erfüllen. Welche anschauliche Begründung gibt es für die Existenz dieses Endpunktes ρ_1? Ermitteln Sie aus der Bestimmungsgleichung für ρ_1 die insgesamt zurückgelegte Weglänge s_1, mit $\rho(s_1) = \rho_1$.

(d) Skizzieren Sie die Lösung in der Projektion auf die xy-Ebene. Achten Sie insbesondere auf das Verhalten der Bahnkurve in der Umgebung des Endpunktes ρ_1. (5)

50. Hyperbolisches Paraboloid



Ein hyperbolisches Paraboloid S ist durch $z = y^2 - x^2$ definiert und gemäß $\vec{r}(u,v) \doteq (u, v, v^2 - u^2)$ parametrisiert.

(a) Bestimmen Sie den Normalenvektor $\vec{N}(u,v)$.

(b) Betrachten Sie eine Kurve $\vec{\alpha}(t) = \vec{r}(u(t), v(t))$ auf S mit $\vec{\alpha}(0) = (0,0,0)$ sowie $|\dot{\vec{\alpha}}(t)| = 1$. Berechnen Sie

$$\dot{\vec{N}} := \frac{d\vec{N}(u(t), v(t))}{dt}.$$

$\dot{\vec{N}}$ liegt in der Tangentialebene an S in $\dot{\vec{\alpha}}(t)$ (warum?), daher gibt es eine (lineare) Abbildung, die so genannte *Weingartenabbildung*, in dieser Tangentialebene: $\dot{\vec{N}}(t) = A(t)\dot{\vec{\alpha}}(t)$. Schreiben Sie $\dot{\vec{N}} = c_1 \partial_u \vec{r} + c_2 \partial_v \vec{r}$ mit zwei Koeffizienten c_1 und c_2 und den Geschwindigkeitsvektor $\dot{\vec{\alpha}}(t)$ ebenfalls als Linearkombination aus $\partial_u \vec{r}$ und $\partial_v \vec{r}$. Geben Sie die 2×2 Matrix $A(t = 0)$ in dieser Basis an.

(c) Welche Gleichung resultiert durch Differenzieren der Identität $\dot{\vec{\alpha}} \cdot \vec{N} = 0$? Schreiben Sie diese Gleichung um, indem Sie einerseits $\ddot{\vec{\alpha}}$ durch die Krümmung κ und den Normalenvektor $\vec{n}$ der Kurve und andererseits $\dot{\vec{N}}$ nach (b) mithilfe der Abbildung A ausdrücken. Welche Bedeutung kommt demzufolge den Eigenwerten der Matrix A zu, falls $\vec{\alpha}(t)$ so gewählt wurde, dass $\vec{n} = -\vec{N}$ gilt? (4)

51. Zylinderkoordinaten

Betrachten Sie die Darstellung des Vektors $\vec{r}$ in Zylinderkoordinaten, $\vec{r} \doteq (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)$. Berechnen Sie das Differential $d\vec{r}$, das Quadrat des Linienelements $(ds)^2$ sowie die Metrik g. Geben Sie das Volumenelement d^3r an, indem Sie einmal $\sqrt{\det g}$ und einmal $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\varphi,z)}$ auswerten.

(3)