19. Hausübung zu den Rechenmethoden der Physik SS 2000

Abgabe am 2. 5. 2000 vor der Vorlesung

55. Gedämpfter Oszillator

In geeigneten Koordinaten nehmen die Gleichungen für den gedämpften harmonischen Oszillator die Form

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \omega \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2\gamma \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix}$$

an. Sie haben die allgemeine Lösung $\begin{pmatrix} x(t) \\ p(t) \end{pmatrix} = \exp(\omega t\, A) \begin{pmatrix} x(0) \\ p(0) \end{pmatrix}$.

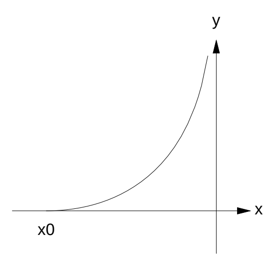
(a) Machen Sie zur Auswertung der Matrixexponentialfunktion Gebrauch von der Identität $\exp(M) = U^{-1} \exp(UMU^{-1})\, U$, mit einer invertierbaren Matrix U. Die rechte Seite lässt sich leicht auswerten, falls UMU^{-1} eine Diagonalmatrix ist.

(b) Bestimmen Sie U in geeigneter Weise und geben Sie damit die allgemeine Lösung an. Beachten Sie, dass die Inverse einer 2×2 Matrix $U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ durch $\frac{1}{\det U} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ gegeben ist.

(c) Welche qualitativ verschiedenen Lösungen erhalten Sie für $\begin{pmatrix} x(0) \\ p(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix}$ in Abhängigkeit von γ? Skizzieren Sie diese Lösungskurven in der xp-Ebene und markieren Sie den Durchlaufsinn. (4)

56. Verfolgungsjagd

Ein Beobachter A sitzt in einem Ruderboot bei $\vec{r} \doteq (x_0, 0)$ mit $x_0 < 0$ und sieht seinen Freund B mit konstanter Geschwindigkeit v entlang der y-Achse vorbeischwimmen. Zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ passiert B den Ursprung und A macht sich mit der konstanten Geschwindigkeit $w > v$ auf die Verfolgung. Seine präzisen Ruderbewegungen erlauben es A, zu jedem Zeitpunkt in die momentane Richtung zu B zu fahren.



(a) Bestimmen Sie die Differentialgleichung der resultierenden Verfolgungsbahn $y(x)$. Parametrisieren Sie dazu zunächst die Bahnkurven von A und B mit t. Sie erhalten zwei Gleichungen aus der Eigenschaft, dass As Geschwindigkeitsvektor auf B zeigt, und die Länge w hat. Eliminieren Sie t durch Differenzieren (Steigung=?) und $\dot{x}$ durch Einsetzen, um eine Differentialgleichung 1. Ordnung für $z = y'$ zu erhalten.

(b) Lösen Sie die Differentialgleichung für z und finden Sie y durch Integration (Anfangswerte?). *Hinweis*: Die Identität $\frac{1}{\sqrt{1+z^2}} = \partial_z \text{arcsinh}\, z = \partial_z \ln(z + \sqrt{1+z^2})$ ist nützlich.

(c) Wo treffen sich A und B? (4)

57. Erzwungene Schwingungen

Das bekannte Problem des harmonischen Oszillators mit einer zeitabhängigen äußeren Kraft $F(t)$, d. h. $\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{1}{m} F(t)$, soll mit veränderter Methodik bearbeitet werden.

(a) Machen Sie dazu den Ansatz $\xi(t) = \dot{x}(t) + i\,\omega\, x(t)$ und schreiben Sie die Oszillatorgleichung als Differentialgleichung für die neue Funktion $\xi(t)$ an.

Bitte wenden!

(b) Lösen Sie zunächst die homogene Differentialgleichung und suchen Sie im Anschluß die allgemeine Lösung vermöge der Variation der Konstanten.

(c) Geben Sie die Gesamtenergie E des Oszillators als Summe aus kinetischer Energie und Auslenkungsenergie an. In welchem Zusammenhang steht E zu ξ?

(d) Nehmen Sie an, der Oszillator befinde sich zum Zeitpunkt $t = -\infty$ in Ruhe. Geben Sie ein Integral für die Energie an, die dem Oszillator in dem Zeitraum $-\infty$ bis $+\infty$ zugeführt wird.

(4)