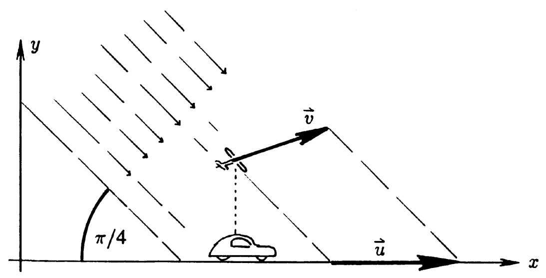
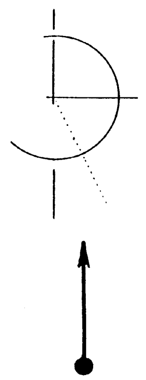
4) Auf der Rückfahrt vom Flughafen bleiben wir mit 120 km/h genau unter einer startenden Maschine, während ihr Schatten (bei Sonnenlicht–Einfall unter $\pi/4$) mit 170 km/h über die Straße gleitet. Welche Geschwindigkeit v hat das Flugzeug? Wieviel Meter gewinnt es pro Sekunde an Höhe?



3

Dies Problem ist zweidimensional. Die Beziehung zwischen $\vec{v}$ und $\vec{u}$ findet man durch geschickte Projektion. Bitte keine Trigonometrie!

5) In der xy–Halbebene mit $x > 0$, in y–Richtung und im Abstand ϱ („Stoßparameter“) zur y–Achse, fliegt ein Teilchen (Masse m) mit Geschwindigkeit v gegen eine harte Kugel (Radius R, Zentrum = Ursprung, $\varrho < R$) und wird dort elastisch reflektiert.



Wo ($\vec{R}$ =?) trifft es die Kugel? Formulieren Sie das Reflexionsgesetz („Einfallswinkel = Ausfallswinkel“) vektoriell und koordinatenunabhängig. Welche Geschwindigkeit $\vec{u}$ (in Komponenten) hat m nach dem Stoß? (günstige Abkürzung $\varrho^2/R^2 =: \lambda$)

Zu jedem Ort $\vec{r}$ eines Teilchens kann man den Drehimpuls $\vec{L} := \vec{r} \times (m\vec{v})$ bilden, wenn $\vec{v}$ seine Geschwindigkeit am Ort $\vec{r}$ bezeichnet. Errechnen Sie $\vec{L}$ explizit an drei Stellen: bei $(\varrho, -5R, 0)$, unmittelbar vor Reflexion und unmittelbar danach — und interpretieren Sie das Ergebnis! (Bis hierher keine Trigonometrie!)

Zur Kontrolle des $\vec{u}$–Resultates überlegen wir uns (je anschaulich direkt), bei welchem Stoßparameter ϱ (a) $\vec{u}$ in x–Richtung zeigt, (b) zwei gleiche positive Komponenten hat, und prüfen dann jeweils nach, ob unsere $\vec{u}$–Formel dies bestätigt. 5

Zwischenresultat: $\vec{u} = v\ (2\sqrt{\lambda - \lambda^2}\ ,\ 2\lambda - 1\ ,\ 0)$. Nützlich ist auch $\cos^2\alpha\ =\ \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$.

6) *Fünf quickies*

a) Zeigen Sie, daß zwei Vektoren orthogonal sein müssen, wenn ihre Summe und Differenz den gleichen Betrag haben

b) Vereinfachen Sie $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot [\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a}]$

c) Vereinfachen Sie $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot [(\vec{a} \times \vec{c}) \times (\vec{b} \times \vec{c})]$

d) Beweisen Sie mit der Vektorrechnung den Sinussatz für ein ebenes Dreieck: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$

e) Berechnen Sie das $(2n{-}1)$fache Produkt $(\ldots(((\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{a}) \times \vec{b}) \times \ldots \times \vec{a}) \times \vec{b}$. Was erhalten Sie für $n \to \infty$? 4