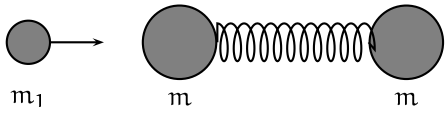
20. Hausübung zu den Rechenmethoden der Physik SS 2000

Abgabe am 8. 5. 2000 vor der Vorlesung

58. Elastischer Stoß



Ein freies Teilchen mit Masse m_1 und Impuls p_1 stößt mit zwei anderen, durch eine Feder verbundenen, Teilchen der Massen $m_2 = m_3 = m$ elastisch zusammen, wie in der Abbildung gezeigt. Der Bewegungsablauf sei auf die x-Achse beschränkt. Die gekoppelten Teilchen 2 und 3 befinden sich vor dem Stoß in Ruhe und haben den Gleichgewichtsabstand a. Die Kraft zum Zeitpunkt des Stoßes t_S soll in der folgenden Form angenommen werden $F(t) = f_0\,\delta(t - t_S)$.

(a) Stellen Sie die Newtonschen Bewegungsgleichungen für die drei Teilchen auf und berechnen Sie durch Integration über das Intervall $[t_S - \epsilon, t_S + \epsilon]$, mit $\epsilon > 0, \epsilon \to 0$, die Anfangsgeschwindigkeit der Relativbewegung zwischen Teilchen 2 und 3. Welchen Wert hat die Konstante f_0, ausgedrückt durch die Impulse des Teilchens 1 vor und nach dem Stoß?

(b) Berechnen Sie den Schwerpunktsimpuls des aus den Teilchen 2 und 3 bestehenden Systems und die Amplitude A der Vibrationsbewegung. (4)

59. Zwei Differentialgleichungen

Bestimmen Sie die allgemeinen Lösungen folgender Differentialgleichungen.

(a) $y'(x + x^2 y) = y - xy^2$. *Hinweis*: Leiten Sie mit Hilfe des Ansatzes $z(x) = xy(x)$ eine Differentialgleichung ab, die Sie mit bekannten Methoden lösen können.

(b) $y'(y^3 - xy) = 1$. *Hinweis*: Fassen Sie diese Gleichung als lineare inhomogene Differentialgleichung für die Umkehrfunktion $x(y)$ auf. Eine spezielle Lösung dieser inhomogenen Gleichung erhalten Sie mit einem Polynomansatz.

Für beide Aufgaben genügt es, jeweils eine implizite Lösung in der Form $f(x, y) = 0$ anzugeben.
(4)

60. Selektion

Dereinst ($t = 0$) gab es ebensoviele weiße wie schwarze Hasen ($x(0) = y(0) = h_0$). Sie vermehrten sich gemäß

$$\dot{x} = a\,x - c\,x\,(x + y)$$
$$\dot{y} = b\,y - c\,y\,(x + y),$$

mit $a > b > 2\,c\,h_0$, im Einklang mit der Umwelt.

Zur Interpretation: $a - c(x + y)$ ist die Differenz aus Geburtenrate und Sterberate für die weißen Hasen. Dieser Überschuss ist proportional zum Futtervorrat angenommen, der seinerseits linear mit dem Gesamtbestand $x + y$ abnehme. Die Voraussetzung $b < a$ beruht auf der geringfügig höheren Sterberate der schwarzen Hasen (Hitzschlaganfälligkeit).

Welche Zukunft $x(t)$, $y(t)$ hat dieses Ökosystem? Welche Grenzwerte werden für $t \to \infty$ erreicht?

Hinweis: Führen Sie neue Funktionen u, v mittels $x =: e^{at - cu}$ und $y =: e^{bt - cv}$ ein. Berechnen Sie $\partial_t(u - v)$ und bestimmen so eine erste Integrationskonstante. Sie erhalten eine Differentialgleichung erster Ordnung für u allein. Trennung der Variablen liefert eine zweite Integrationskonstante B. Bestimmen Sie schließlich die Konstanten aus den Anfangsbedingungen. (4)