22. Hausübung zu den Rechenmethoden der Physik SS 2000

Abgabe am 22. 5. 2000 vor der Vorlesung

64. Öltropfen in einer Pfütze

Ein kreisförmiger Öltropfen der Masse m schwimmt in einer zweidimensionalen Pfütze und wird von der Oberflächenspannung auseinandergezogen, so dass der Radius $R(t)$ mit der Zeit t anwächst. Die Strömung des Öls erfolge in einer solchen Weise, dass zu jedem Zeitpunkt die Öldichte innerhalb der Kreisscheibe $R(t)$ räumlich konstant sei.

(a) Geben Sie die Dichte $\rho(\vec{r}, t)$ mit Hilfe der Stufenfunktion θ an.

(b) Die Stromdichte ist durch $\vec{j} = \rho\vec{v}$ gegeben. Die Strömungsgeschwindigkeit ist ersichtlich radialsymmetrisch und hat die Gestalt $\vec{v} = f(r)\vec{e}_r$. Machen Sie Gebrauch von der Kontinuitätsgleichung, um sowohl eine Differentialgleichung als auch eine Randbedingung für die Funktion $f(r)$ zu erhalten und diese zu lösen. (4)

65. Wirbelfeld

Von einem Magnetfeld $\vec{B}$ sei lediglich die verursachende elektrische Stromdichte $\vec{j} = \vec{\nabla} \times \vec{B}$ bekannt. Diese ist nur auf der xy-Ebene von Null verschieden und zeigt radial nach aussen: $\vec{j}(\rho, \varphi, z) = f(\rho)\,\delta(z)\,\vec{e}_\rho$. Dabei variiert $\vec{j}$ in einer solchen Weise, dass der Strom $I = \int_Z d\vec{f} \cdot \vec{j}$ durch eine Zylinderoberfläche Z unabhängig von deren Radius ist (Zylinderachse $=$ z-Achse).

(a) Berechnen Sie die Stromdichte $\vec{j}$.

(b) Bestimmen Sie das Magnetfeld $\vec{B}$ aus dem Ansatz $\vec{B} = b(\rho, z)\vec{e}_\varphi$. Eine Konstante ist so zu wählen, dass $\vec{B}(\rho, \varphi, z) = -\vec{B}(\rho, \varphi, -z)$ gilt.

(c) Überprüfen Sie, ob $\operatorname{div}\vec{B} = 0$ erfüllt ist. (5)

66. Longitudinale und transversale Komponenten eines Vektorfeldes

Ein beliebiges Vektorfeld $\vec{F}(\vec{r}, t)$ läßt sich stets in einen longitudinalen (=wirbelfreien) Anteil $\vec{F}_\ell$ und einen transversalen (=quellenfreien) Anteil $\vec{F}_t$ zerlegen, d. h. $\vec{F} = \vec{F}_\ell + \vec{F}_t$. Dabei sind $\vec{F}_t$ und $\vec{F}_\ell$ durch

$$\vec{F}_\ell(\vec{r}, t) = -\frac{1}{4\pi}\vec{\nabla} \cdot \int d^3r' \, \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{F}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$\vec{F}_t(\vec{r}, t) = +\frac{1}{4\pi}\vec{\nabla} \times \left[\vec{\nabla} \times \int d^3r' \, \frac{\vec{F}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|}\right]$$

gegeben. Offensichtlich erfüllen die so definierten Felder die Bedingung der Wirbel- bzw. der Quellenfreiheit. Um $\vec{F}_t = \vec{F} - \vec{F}_\ell$ nachzuweisen, gehen Sie wie folgt vor.

(a) Formen Sie den angegebenen Ausdruck für $\vec{F}_t$ nach den Regeln der Vektoranalysis in eine Summe aus zwei Termen um.

(b) Verwenden Sie für einen Term die Identität $\vec{\nabla}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = -\vec{\nabla}'\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$ und integrieren Sie partiell. Die Felder sollen für $|\vec{r}'| \to \infty$ so schnell abfallen, dass der Oberflächenterm keinen Beitrag liefert.

(c) Ziehen Sie für den zweiten Term Ihr Wissen aus der Vorlesung über $\Delta\frac{1}{r}$ heran. (3)