25) Eigenwert–Probleme

a) $H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 3 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$. Zu jedem der zwei symmetrischen Matrix–Operatoren bestimme man die zwei Eigenwerte λ_1, λ_2, die jeweils zugehörigen normierten Eigenvektoren $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$ ($\vec{f}_1 \perp \vec{f}_2$?), schreibe sie in die Zeilen einer Drehmatrix D und bilde zur Probe DHD^T bzw. DID^T. Ohne erneut zu rechnen (!): welche Eigenwerte haben $J = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ und $K = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$?

b) Bei $\varepsilon \to 0$ werden die Matrizen $S = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 \end{pmatrix}$ und $T = \begin{pmatrix} 1+3\varepsilon & 4\varepsilon \\ 4\varepsilon & 1-3\varepsilon \end{pmatrix}$ gleich; was passiert im Limes mit den beiden Paaren von Eigenwerten und zugehörigen Eigenvektoren?

zu a): Matrix I hat $\vec{f}_1 \doteq \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ zu EW $\lambda_1 = 0$ und $\vec{f}_2 \doteq \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ zu EW $\lambda_2 = 4$.
zu b): Gleiche EW, aber die Eigenvektoren von S, T „wissen“ noch von ihrer Herkunft. 5

26) Hauptachsen–Transformation

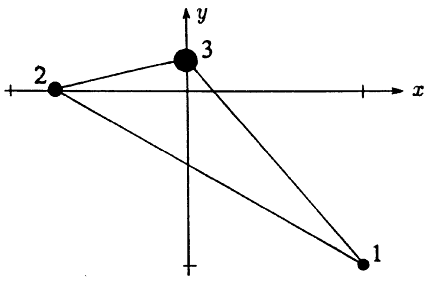
Die Aufgabe 23 (anisotropes Potential–Minimum) soll per Hauptachsen–Transformation quantitativ gelöst werden für die Anfangsbedingungen $\underline{r}(0) = \frac{a}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ und $\underline{\dot{r}}(0) = 0$.
Zur Erinnerung: $\vec{F} = -\hat{H}\vec{r}$ mit $\hat{H} \doteq H = \frac{1}{4}\kappa \begin{pmatrix} 5 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 \end{pmatrix}$.

Führen Sie die Hauptachsen–Transformation durch (Eigenwerte finden und testen, Eigenvektoren bestimmen, testen und normieren, H' und D notieren)! Lösen Sie jetzt die Bewegungsgleichungen im gedrehten System für die obigen Anfangsbedingungen und transformieren Sie zurück: $\underline{r}(t) = ?$ Skizze der Bahnkurve!

Im gedrehten System ergibt sich: $m\,\ddot{x}' = -\frac{3}{2}\kappa\, x'$, $m\,\ddot{y}' = -\frac{1}{2}\kappa\, y'$.
Auf Orientierung der Eigenvektoren (= neuen Basisvektoren) achten!
Anfangsbedingungen mit transformieren! 4

27) Trägheitstensor

Durch masselose Drähte sind drei Kugeln starr miteinander verbunden:



$m_1 =: m$ bei $\vec{r}_1 \doteq (\,1\,,\,-1\,,\,0\,)\,a$
$m_2 = 4m/3$ bei $\vec{r}_2 \doteq (\,-3/4\,,\,0\,,\,0\,)\,a$
$m_3 = 6\,m$ bei $\vec{r}_3 \doteq (\,0\,,\,1/6\,,\,0\,)\,a$.

Wo liegt der Schwerpunkt $\vec{R}$ dieses Systems? Welchen Trägheitstensor I hat es? Bestimmen Sie die Haupt–Trägheitsmomente (:= I–Eigenwerte)!

Zusatzpunkt: Skizze der in der xy–Ebene liegenden zwei Hauptachsen.

Teilresultat: $I_1 = 30\,ma^2/12$ und $I_2 = 5\,ma^2/12$. 3