(2 volle Stunden. Bei $\geq$ **10** *Punkten wird der Klausurerfolg garantiert. Bitte Name auf j e d e s Blatt !)*

1) Eine Masse m wird von einem Stern (M bei $\vec{r}=\vec{a}$) angezogen, kann sich aber nur auf der Ebene $\vec{e}\cdot\vec{r}=0$ frei bewegen. Wo ($\vec{r}_0=?$) hat m eine Gleichgewichts-Position? Mit welcher Kraft $\vec{F}$ zieht m dort an der Ebene? (Skizze ist hilfreich.) 2

2) Aus den 3 dreidimensionalen Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ wird der Skalar $\varepsilon_{imj}\,\varepsilon_{jnk}\,\varepsilon_{kpi}\,u_m\,v_n\,w_p$ gebildet. Man vereinfache ihn zu einem Ausdruck in den Vektoren! ($\varepsilon_{jim}\,\varepsilon_{jnk}=?$) 2

3) In zwei Dimensionen ist das Potential $V(\vec{r}) = -\vec{a}\cdot\vec{r}/r$ mit einem festen Vektor $\vec{a}$ vorgegeben. Es soll das zugehörige Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r})$ bestimmt werden. Man überprüfe daß $\vec{r}\cdot\vec{F}=0$. Was bedeutet dies für eine radiale Bewegung ($\dot{\vec{r}}\parallel\vec{r}$)? Wie sehen die Äquipotentiallinien aus? (Überlegung oder Rechnung: $\vec{a}\cdot\vec{r}=a\,r\cos\phi$.) Skizze für $\vec{a}=\vec{e}_2$! 4

4) Die Anzahl $N(t)$ radioaktiver Kerne möge (wegen Zerfall und wachsender Produktion) der Gleichung

$$\dot{N} \;=\; -\alpha\,N+\beta\,t \qquad \text{mit} \quad N(0)=0$$

genügen. Man löse mittels Ansatz. Mit welcher t–Potenz *beginnt* N zu wachsen? Der Zerfall ist für die Langzeit-Asymptotik wichtig, denn $N(t\to\infty)\sim t^?$, wogegen $\lim_{\alpha\to+0}N=?$ Welche mittlere Anzahl $\overline{N}$ liegt im Zeitraum $0<t<\frac{1}{\alpha}$ vor? 5

5) Auf einem winterlichen Parkplatz erlebt man bei Vollbremsung mit Geschwindigkeit $\vec{v}\doteq v_0(u,w)$ die Reibungskraft

$$\vec{R} \;\doteq\; -m\,\alpha\,v_0\left(10\,\mathrm{sh}\frac{u}{2}+\frac{2w}{1+2uw}\;,\;\frac{2u}{1+2uw}+\frac{2w}{\sqrt{1+w^2}}\right) \;=:\; -m\,\alpha\,v_0\left(\partial_u V\;,\;\partial_w V\right) \quad .$$

Welches „Potential" $V(u,w)$ liegt vor? Man entwickle V bis (mit) zu quadratischen Termen in u und w und bringe es in die Form $V=\text{konst.}+\frac{1}{2}\,{}^{(u,w)}H\binom{u}{w}$, mit 2×2–Matrix $H=?$. 4

6) Für kleine $\vec{v}$ ($u,w\ll 1$) auf dem Parkplatz (5) wird die Reibungskraft näherungsweise

$$\vec{R} \;\doteq\; -m\,\alpha\,v_0\left(5u+2w\;,\;2u+2w\right) \qquad [\,\text{Test der Matrix } H \text{ aus (5)!}\,] \quad .$$

Welche Hauptachsen hat der Parkplatz? Skizze! Unter welcher Drehung ($D=?$) erhält die Bewegungsgleichung $m\dot{\vec{v}}=\vec{R}$ welche einfachere Gestalt? Zu $(u,w)(t{=}0)=\frac{1}{\sqrt{5}}(2,1)$ soll ($(u',w')(0)=?$) ihre Lösung $\underline{v}'(t)=v_0\,(u',w')(t)$ im Hauptachsensystem angegeben werden. 5

7) Zwei Punkt-Sterne (je M) ruhen bei $(-a,0,0)$ bzw. bei $(+a,0,0)$ auf der x–Achse.
a) Wie lautet das von ihnen erzeugte Gravitationspotential $V(\vec{r})$? (Superposition!)
b) Mit welcher Kreisfrequenz ω führt eine Raumsonde (m) auf der z–Achse kleine harmonische Schwingungen aus? ($\ddot{z}=-\omega^2\,z+O(z^3)$)
c) Mit welcher Mindest-Geschwindigkeit v_∞ müßte sie den Ursprung durcheilen, um den Doppelstern für immer zu verlassen? (Energiesatz!) 5

8) Ein sehr langer gerader Stab ($-L\leq x\leq +L$) besitzt eine ortsabhängige elektrische Ladungsdichte $q(x)=q_0\,e^{-\gamma|x|}\cos\omega x$ mit $\gamma{>}0$. Man berechne für $L\to\infty$ die Gesamtladung Q des Stabs mit Hilfe der Euler-Formel. (Symmetrie?) 2

9) Mit welcher Periode T schwingt eine Masse m mit Amplitude a im eindimensionalen Potential $V(x)=-c/x^2$? Wie hängt T von der Energie E ab? ($E=?$) 3

10) Eine Rakete (m) soll ab $(0,a)$ auf der Geraden parallel zur x–Achse nach ∞ fliegen. Man parametrisiere den Weg $\vec{r}(t)$ so einfach wie möglich. *Gegen* die gravitative Anziehung durch einen Stern (M) am Ursprung ist Arbeit A zu verrichten. Das Kurvenintegral für A soll explizit ausgewertet werden. ($\partial_t\,1/\sqrt{t^2+1}=?$) 3

Σ 35