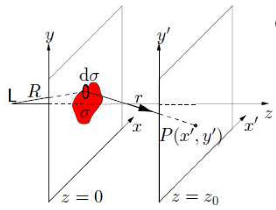
13. Hausübung zur Physik I	Abgabe: Di 20.01.09

Aufgabe 50: Licht einer Punktquelle trifft auf einen in y-Richtung unendlich langen Spalt der Breite $\Delta x = b$. Der Spalt liegt bei $z = 0$. Wie groß ist der Abstand r eines Beobachtungspunktes von einem Punkt im Spalt? Geben Sie die Feldamplitude $E = E(r)$ in der Ebene $y = 0$ für große r als Integral über die Spaltbreite an. 3



Aufgabe 51: In einem eindimensionalen Resonator der Länge L bilden sich stehende Wellen. 2
a) Welche Wellenzahlen sind möglich?
b) Die Zahl $\mathrm{d}n$ der möglichen Eigenschwingungen pro Volumen des Resonators innerhalb des Frequenzintervalls von ν bis $\nu+\mathrm{d}\nu$ definiert die spektrale Modendichte $\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\nu}$. Berechnen Sie die Modenzahl für einen Resonator mit Länge $L = 1$ in einem Frequenzfenster $\mathrm{d}\nu = 1$ Hz bei einer Wellenlänge von 632 nm.

Aufgabe 52: Ein Hüttendach D mit welliger Höhe $h(x,y) = h_0 + d\,\cos(2\pi n x/L)$ über einer Grundfläche $(x,y) \in [0,L]\times[0,L]$ wird von der Sonne bestrahlt. Der aus $(-1,-1,+1)$ kommende Photonenstrom wird noch durch eine Wolke ortsabhängig abgeschwächt, so dass die Energiestromdichte $\vec{j}(\vec{r})$ (= Energiefluss pro Zeit und Fläche) am Ort $\vec{r} \doteq (x,y,z)$ die folgende Form hat: 4

$$\vec{j}(\vec{r}) \;\doteq\; \left(\alpha\frac{z}{h_0} - \beta\frac{x}{L}\right)\begin{pmatrix}+1\\+1\\-1\end{pmatrix} \qquad \text{mit} \quad \alpha,\beta > 0 \quad .$$

Mit wie viel Energie pro Zeit (Leistung) $P = -\int_D \mathrm{d}\vec{f}\cdot\vec{j}(\vec{r})$ wird das Dach $\vec{r} \doteq (x,y,h(x,y))$ (bei 100%iger Absorption) aufgeheizt?

Hinweis: Ein Integral $\int_0^L \mathrm{d}x\, x\, \sin kx$ attackiere man mit partieller Integration. Ergebnis: $P = (\alpha - \frac{\beta}{2})L^2 - \beta\, dL$.

Aufgabe 53: Betrachten Sie in der xz-Ebene einen Kreis vom Radius R, dessen Mittelpunkt von der z-Achse den Abstand $a > R$ hat. Durch Rotation dieses Kreises um die z-Achse entsteht ein Torus. Berechnen Sie den Flächeninhalt A der Torus-Oberfläche, indem Sie die aus der Vorlesung bekannten Formeln anwenden auf die Parameterdarstellung 3

$$\vec{r}(t,s) \;\doteq\; (\,(a+R\cos s)\cos t\,,\,(a+R\cos s)\sin t\,,\,R\sin s\,)\;.$$

Aufgabe 54: Das Differenzial $\mathrm{d}\phi(\vec{r})$ eines skalaren Feldes ϕ in zwei Dimensionen lautet 3

$$\mathrm{d}\phi \;=\; \vec{\nabla}\phi\cdot\mathrm{d}\vec{r} \;=\; \partial_x\phi\,\mathrm{d}x + \partial_y\phi\,\mathrm{d}y \;=\; \partial_u\phi\,\mathrm{d}u + \partial_v\phi\,\mathrm{d}v\;, \qquad (*)$$

wobei einmal $\vec{r} = \vec{r}(x,y)$ und ein andermal $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$ verwendet wurde. Wenn die Umrechnung der Koordinaten bekannt ist, $(x,y) = (x(u,v), y(u,v))$, dann hängen die Koordinaten-Differenziale $(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)$ und $(\mathrm{d}u,\mathrm{d}v)$ über die Jacobi-Matrix J zusammen. Nutzen Sie dies, um auch den Gradienten $(\partial_x\phi,\partial_y\phi)$ durch $(\partial_u\phi,\partial_v\phi)$ auszudrücken. Vorsicht: $(\partial_u\phi,\partial_v\phi) \,\dot{\neq}\, \vec{\nabla}\phi$! Geben Sie J, $|\det J|$, $G{=}J^\top J$, $(\mathrm{d}s)^2$, $\mathrm{d}f$ und $\vec{\nabla}\phi$ an für Polar- und parabolische Koordinaten,

$$(x,y) \;=\; (\,r\cos\varphi\,,\,r\sin\varphi\,) \qquad \text{und} \qquad (x,y) \;=\; (\,u\,v\,,\,\tfrac{1}{2}(v^2{-}u^2)\,)\;.$$

Hinweis: Schreiben Sie die Linearkombinationen in $(*)$ als Zeile mal Spalte $\Rightarrow$ $(\partial_x\phi,\partial_y\phi) = (\partial_u\phi,\partial_v\phi)\left(\begin{smallmatrix}?&?\\?&?\end{smallmatrix}\right)$.
Bonuspunkt: Leiten Sie mit Hilfe von $\partial_u\vec{r} = \vec{e}_u b_u$ und $\partial_v\vec{r} = \vec{e}_v b_v$ auch eine Formel für den Nabla-Operator $\vec{\nabla} = \vec{e}_x\partial_x + \vec{e}_y\partial_y$ von der Form $\vec{\nabla} = (\vec{e}_u,\vec{e}_v)M\left(\begin{smallmatrix}\partial_u\\\partial_v\end{smallmatrix}\right)$ ab. Drücken Sie die Matrix M durch G und (b_u,b_v) aus.

Dies sind die letzten Hausübungen in diesem Semester